

目次

| | |
|-------------------------------------|-----------|
| 第 1 部 序論 | 3 |
| 1.1 はじめに | 3 |
| 1.2 微小光共振器 | 4 |
| 1.2.1 微小光共振器の性能 | 4 |
| 1.2.2 微小光共振器の種類 | 4 |
| 1.2.3 微小光共振器の作製 | 9 |
| 1.3 利得媒質 | 11 |
| 1.4 可飽和吸収体 | 12 |
| 1.5 光周波数コム | 14 |
| 1.5.1 光周波数コムとは | 14 |
| 1.5.2 発生手法 | 15 |
| 1.6 散逸性カーソリトン | 16 |
| 1.7 本研究の目的 | 17 |
| 第 2 部 理論 | 19 |
| 2.1 結合モード理論 | 19 |
| 2.2 スプリットステップフーリエ法 | 21 |
| 2.2.1 アルゴリズム概要 | 21 |
| 2.2.2 計算精度 | 23 |
| 2.3 微小光共振器のモデル化 | 24 |
| 2.3.1 Lugiato-Lefever 方程式 | 24 |
| 2.3.2 Er 添加微小光共振器 | 28 |

| | | |
|--------------|-------------------------------------|-----------|
| 第 3 部 | 可飽和吸収体の効果を付与した LLE | 33 |
| 3.1 | ソリトン発生の原理 | 33 |
| 3.2 | シミュレーション実行例 | 35 |
| 3.2.1 | 可飽和吸収体を用いない場合 | 36 |
| 3.2.2 | 可飽和吸収体を用いた場合 | 39 |
| 3.3 | 変調深さとの関係 | 41 |
| 第 4 部 | E_r 添加微小光共振器の解析 | 44 |
| 4.1 | モード同期パルス | 44 |
| 4.2 | 計算結果 | 45 |
| 4.2.1 | 低損失の場合 | 45 |
| 4.2.2 | カラーマップ | 48 |
| 4.3 | 考察 | 51 |
| 4.3.1 | 利得の計算手法による違い | 51 |
| 4.3.2 | モード同期に必要な条件 | 53 |
| 第 5 部 | 結論 | 54 |

第1部

序論

1.1 はじめに

高度情報社会となった現在、我々は大量の情報をやりとりしながら日々生活している。十数年前には考えられなかったが、今やスマートフォンを片手に、SNS や動画視聴を楽しむ光景が当たり前となった。そして、2020 年からは日本でも第 5 世代移動通信システム「5G」のサービスが始まった。今後普及が進めば、より大量のデータを高速にやり取りするようになり、我々の生活はますます快適になってゆくかもしれない。また 2020 年と言えば、新型コロナウイルスの流行によりそれまでと比べ社会が大きく変化した年でもあった。密を避けた行動様式が提唱され、大学では授業のオンライン化、また社会ではテレワークが推奨されるなどの対策が講じられた。こうした時代背景は、データ通信量の増加にますます拍車をかけることになるであろう。

ここで今後問題となるのは、この増加によるエネルギー消費量である。単純に考え莫大な量のデータがやり取りされる場合、その分多量のエネルギーを消費することは容易に想像されるが、環境へ配慮した観点からもこうしたエネルギーの大量消費は望ましくない。そこでこの問題を解決するために期待されるのが現行の電気を用いたシステムではなく、光を用いたシステムに置き換える方法である。電気回路ではジュール熱による損失が必ず発生してしまうが、一方で光回路を用いた場合にはジュール熱は発生せず、より少ないエネルギー損失でシステムを実現することが可能であるため、省エネルギーが達成できると考えられている。

このような観点から光集積回路に必要な光デバイスに注目が集まっているが、そのためには理論的な解析が不可欠である。光を扱う場合には微小共振器を用いて物質と光の相互作用を高め、それにより複雑な非線形効果等が発生するが、本研究はこれらをシミュレーションし、さらには実際の応用に還元できる現象が生じるかどうかを新たなモデルを立て数値解析を行った。これらの結果は、実際のデバイスを作る際の指針となるはずである。

1.2 微小光共振器

1.2.1 微小光共振器の性能

微小光共振器とは光を微小領域に閉じ込める素子であるが、完全に閉じ込めることはできない。光が閉じ込められる程度は Q 値を用いて評価され、共振角周波数を ω_0 、共振器内エネルギーを U_0 とすると

$$Q = \omega_0 \times \frac{U_0}{\left| \frac{dU_0}{dt} \right|} \quad (1.2.1)$$

と表される。すなわち、 Q 値とは共振角周波数 ω_0 に、共振器に蓄えられているエネルギーと単位時間あたりに失われるエネルギーの比の値を乗じた値である。ここで共振器内部のエネルギーが $1/e$ 倍となる時間である光子寿命 τ_0 を用いると Q 値は

$$Q = \omega_0 \times \tau_0 \quad (1.2.2)$$

となり、共振器内により多く光が閉じ込められる程より高い Q 値となる。

Q 値を下げる要因には、共振器中に損失があることが挙げられる。具体的には材料吸収、放射損失、表面散乱、結合損失などが挙げられ、これらによる影響を考慮した上で、全体の Q 値は

$$\frac{1}{Q_{\text{tot}}} = \frac{1}{Q_{\text{abs}}} + \frac{1}{Q_{\text{rad}}} + \frac{1}{Q_{\text{surf}}} + \frac{1}{Q_{\text{coup}}} \quad (1.2.3)$$

と決まる。

また、 Q 値と同様に共振器の性能を決める大事なパラメータとしてモード体積 V_{eff} がある。これは電界 $E(x, y, z)$ と誘電率 ϵ を用いて

$$V_{\text{eff}} = \frac{\iiint \epsilon |E(x, y, z)|^2 dx dy dz}{\max[\epsilon |E(x, y, z)|^2]} \quad (1.2.4)$$

と定義されており、光が閉じ込められている領域の大きさを表す。より小さい空間に光を閉じ込め物質と光の相互作用を強く引き起こしたい微小光共振器の特性としては、 Q 値が大きく、 V_{eff} の値が小さいものが望ましい。

1.2.2 微小光共振器の種類

微小共振器には光の閉じ込め方によって様々な種類がある。ここでは、代表的なファブリペロー共振器、ウィスパリングギャラリーモード共振器、フォトニック結晶共振器を取り上げる。

1.2.2.a ファブリーペロー共振器

ファブリーペロー共振器は Fig. 1.1. に表されるような、鏡を 2 枚向かい合わせた単純な構造をした共振器である。主に鏡の反射率によって閉じ込められる光の量が決まり、この共振器の特徴として高い Q 値を示すことが知られている。実際、モード体積は大きくなってしまふのだが、 $Q = 5 \times 10^{11}$ と高 Q 値の共振器が作製されている^[1]。

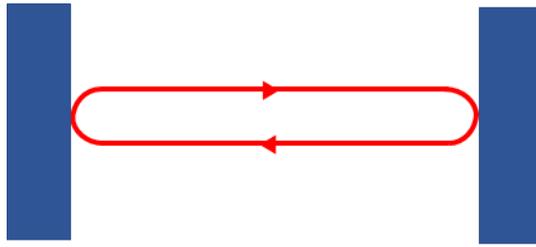


Fig. 1.1. Schematic illustration of Fabry-Perot cavity.

ミラー間隔を L 、共振器内部の屈折率を n 、波長を λ とすると共振器内に存在できる定常波は整数 m を用いて

$$m\lambda = 2nL \quad (1.2.5)$$

という関係が成り立つ。従って共振器内に存在する周波数は離散的な値を取ることになり、それらの間隔 FSR(Free Spectral Range) は光速 c を用いて

$$\text{FSR} = \frac{c}{2L} \quad (1.2.6)$$

となる。より厳密には、共振器内の損失があるため存在できる周波数は以下のように計算できる。1 往復ごとの振幅減衰定数を r 、位相変化を φ とすると i 往復した時の波動 U_i は

$$U_i = re^{-j\varphi}U_{i-1} \quad (1.2.7)$$

という関係になるため、これらの波の重ね合わせにより、 $h = re^{-j\varphi}$ を用いて

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots \quad (1.2.8)$$

$$= U_0(1 + h + h^2 + \dots) \quad (1.2.9)$$

$$\simeq \frac{U_0}{1 - h} \quad (1.2.10)$$

で与えられる。従って強度 I は

$$I = \frac{|U_0|^2}{|1 - h|^2} \quad (1.2.11)$$

$$= \frac{|U_0|^2}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2(\frac{\varphi}{2})} \quad (1.2.12)$$

と計算でき、 $\mathcal{F} = \frac{\phi\sqrt{r}}{1-r}$ で定義されるフィネスを用ると

$$I = \frac{\frac{|U_0|^2}{(1-r)^2}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2(\frac{\varphi}{2})} \quad (1.2.13)$$

と表される。1 往復での位相変化 φ は

$$\varphi = L \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) = \frac{2\pi f L}{c} \quad (1.2.14)$$

であるため、強度 I は周波数 f に依存し、グラフで表すと Fig. 1.2. のようになる。それぞれのピークは FSR 分だけ離れているが、そのピークを中心として広がりを持つことが分かる。

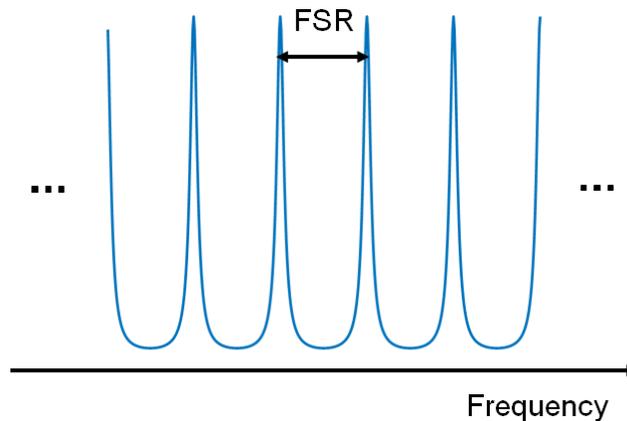


Fig. 1.2. Resonant spectrum of cavity.

1.2.2.b ウィスパリングギャラリーモード共振器

ウィスパリングギャラリーモード共振器 (WGM 共振器) は、共振器の中を光が全反射を繰り返すことにより光を閉じ込める共振器である。この名は、ロンドンのセントポール大聖堂で見られる、小さな声でさえ壁を伝って離れた人に届くという「ささやきの回廊」が由来となっている。「声」が「回廊」を周回するように「光」が「共振器」の周回する

のが特徴であり、共振器自体の形には様々なものがある。具体的には Fig. 1.3. に示すように、微小球型やリング型、ディスク型等の形が考えられている。

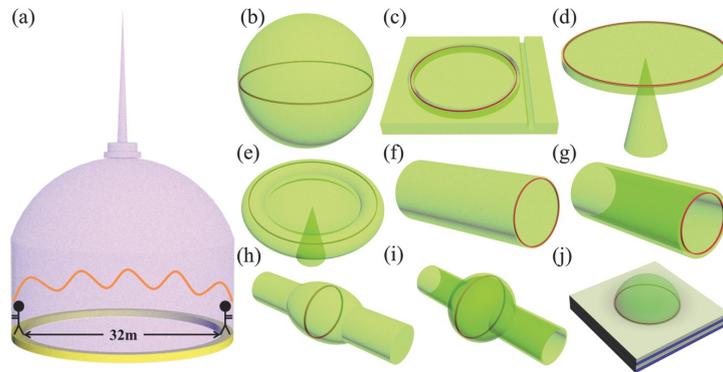


Fig. 1.3. (a) Schematic of the dome of the St Paul's Cathedral in London. (b) Microsphere. (c) Microring. (d) Microdisk. (e) Microtoroid. (f) Optical fiber. (g) Microcapillary. (h) Microbottle. (i) Microbubble. (j) Hemisphere. The red line indicates the main optical path in the microcavity. [S. Yang, Y. Wang, and H. Sun, "Advances and prospects for whispering gallery mode microcavities," *Advanced Optical Materials* **3** (9), 1136–1162 (2015).]

なお共振器の形だけではなく、共振器に使われる物質も多岐にわたる。例えば、結晶共振器と呼ばれる MgF_2 や CaF_2 を使った共振器があるが、これらの共振器は比較的高い Q 値を示すことが知られている^[2]。一方でこれらより Q 値が少し劣るものの、シリコン基板上で作ることが可能なシリカ共振器がある^[3]。材料の違いにより製作方法も異なり、結晶共振器は材料を切削し研磨することで作製されるが、シリカの共振器はフォトリソグラフィやリフローをすることで作製される。

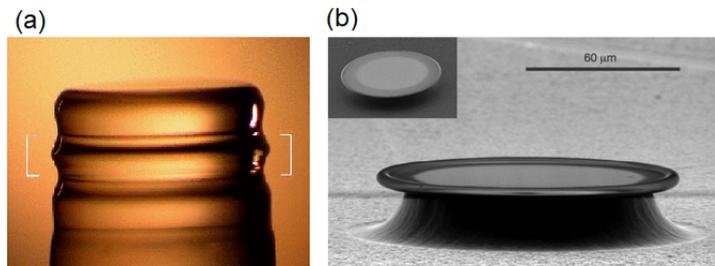


Fig. 1.4. Microresonator made of (a) CaF_2 [I. S. Grudin, V. S. Ilchenko, and L. Maleki, "Ultra-high optical Q factors of crystalline resonators in the linear regime," *Phys. Rev. A* **74**, 063,806 (2006).] (b) SiO_2 [D. Armani, T. Kippenberg, S. Spillane, and K. Vahala, "Ultra-high- Q toroid microcavity on a chip," *Nature* **421**(6926), 925–928 (2003).]

1.2.2.c フォトニック結晶共振器

フォトニック結晶とは光の波長程度の周期で異なる屈折率を持つ物質を並べたものである。このような構造に光を入射すると、屈折率が異なる物質間で光の反射が起こるが、その反射して戻ってくる光の位相が揃っている場合強め合いが生じ、ブラッグ反射となる。その結果、フォトニック結晶中を伝搬できない波数が存在し、禁制帯が生じる。フォトニック結晶の場合、この領域はフォトニックバンドギャップと呼ばれる。フォトニック結晶共振器では、このフォトニックバンドギャップによって光を閉じ込める仕組みである。

フォトニック結晶共振器の例を Fig. 1.5. に示す。周期的に穴が空いている構造であるが、その一部の穴をなくすことにより、周期構造をした他の領域では伝搬できない光がその穴のない部分に閉じ込められ、さらに穴の位置を変えることにより特性も変化させることができる。なおこの共振器の周期構造には、平面に広がる2次元方向の構造と、更に垂直方向にも周期構造を持たせた3次元の構造がある^[4]。

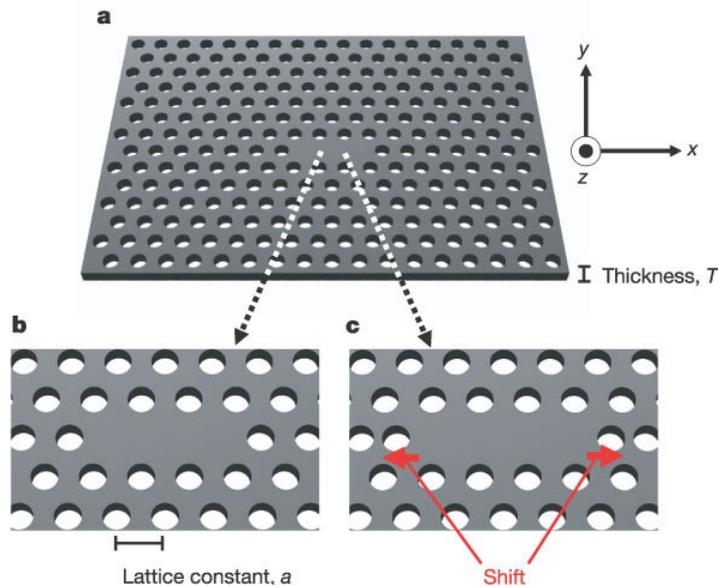


Fig. 1.5. **a**, Schematic of the base cavity structure having a triangular lattice of air rods with lattice constant a ($= 0.42 \mu\text{m}$). The thickness of the slab and the radius R of the air rods are $0.6a$ ($0.25 \mu\text{m}$) and $0.29a$ ($0.12 \mu\text{m}$), respectively. **b**, Starting cavity structure with three missing air rods in a line. **c**, Designed cavity structure created by displacing the air rods at both edges to obtain an ultrahigh Q/V value. [Y. Akahane, T. Asano, B.S. Song, and S. Noda, "High- Q photonic nanocavity in a two-dimensional photonic crystal," *Nature* **425** (6961), 944–947 (2003).]

1.2.3 微小光共振器の作製

共振器の種類が異なる場合作製方法も異なるが、本研究は Fig. 1.6. に示すシリカのトロイド共振器を対象として数値解析を行ったため、この共振器に焦点を当てる。

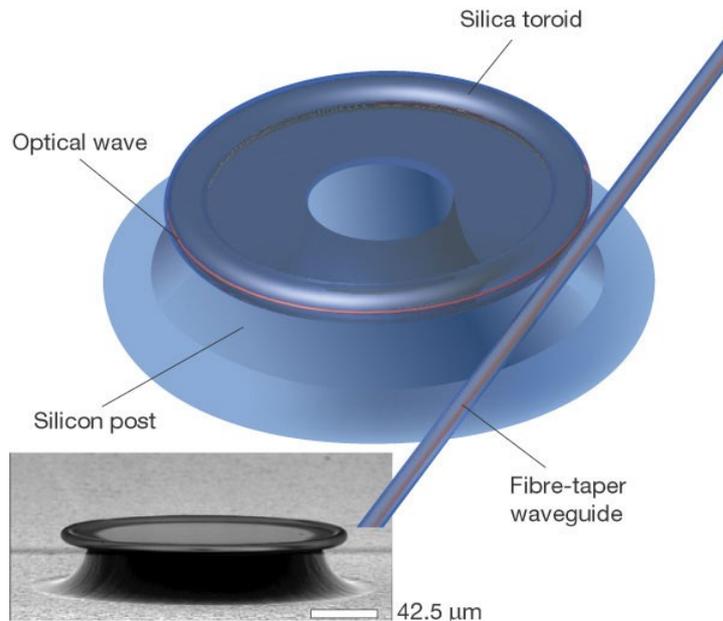


Fig. 1.6. Rendering of an ultrahigh- Q microtoroid resonator and a scanning electron micrograph of a microtoroid resonator consisting of a thin silica layer upon a silicon post and substrate. [K. J. Vahala, “Optical microcavities,” *nature* **424**(6950), 839–846 (2003).]

作製手順は大きく分け、フォトリソグラフィ、ウェットエッチング、XeF₂ エッチング、CO₂ レーザリフローの4つの工程からなる。

1. フォトリソグラフィ

フォトリソグラフィとは、パターンを基板上に転写する技術である。基板上に付着したゴミ等を除去した後、フォトレジストを塗布する。フォトレジストとは光に反応する感光材料であり、この後の工程で露光した際にその部分が現像液に溶け出す「ポジ型」と溶け出さずに残る「ネガ型」に分類されるが、今回はネガ型として話を進める。プリベークと呼ばれるレジストとシリカ膜の密着性を高めるために熱を加える工程の後、マスク越しに光を照射する露光がされる。そして現像液を用いて現像することにより、所望のパターンを得ることができる。最後に現像液を純水で洗い流し、さらにポストベークをすることにより密着性が高められる。

2. ウェットエッチング

ウェットエッチングとは、液体の薬品を用いて対象を腐食溶解させることにより加工する工程である。今回はフッ酸を用いてシリカ膜をウェットエッチングする。この作業により、前プロセスにてレジストが塗布された箇所以外のシリカ膜部分が無くなり、さらにレジストを剥離することで、レジストの下部にあるシリカが露出してくる。

3. XeF₂ エッチング

XeF₂ を用いて化学気相エッチングを行う。XeF₂ はシリコンを選択的に削るが一方でシリカはほとんど削らず、その比は 1000:1 である。その結果、ほぼシリコンのみが削られ、さらにはシリカの下にあるシリコンも抉るように削りアンダーカットされる。なお、このようなアンダーカットが生じるエッチングは等方性エッチングと呼ばれる。

4. CO₂ レーザリフロー

アンダーカットされた結果、シリコンの支柱の上にそれ自体よりも大きな直径のディスク状のシリカが乗っている状態となる。これに CO₂ レーザをあてると、シリカはシリコンより CO₂ レーザを吸収しやすく、さらにシリコンはシリカより熱伝導率が高い性質があるため、CO₂ レーザの照射を受けシリカに熱が溜まるのだが、シリコンに接する部分は熱が逃げやすいのに対し、シリカのディスク周辺部はシリコンに接していないため熱を溜めやすい。従って、そのディスク周辺部のみが融解し、トロイド型となる。

以上の工程をまとめた図を Fig. 1.7. に示す。



Fig. 1.7. Fabrication of silica microtroid. The process consists of photography, wet etching, XeF₂ etching, and CO₂ laser reflow.

1.3 利得媒質

レーザーとは Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation の頭文字に由来し、誘導放出による光増幅を意味する。これは上状態原子数が下状態原子数よりも多い反転分布状態の場合に、他の光に誘導されてそれと位相の揃った光を放出する誘導放出が起きることにより増幅される現象である。そしてこれを実現する際に必要な物質としては、前節で説明した共振器に加え利得媒質が挙げられる。媒質に用いる物質がそのレーザーの特徴に大きく影響するため、利得媒質の選び方は重要である。代表的な例を種類ごとに分類し以下に取り上げる。

1. 固体レーザー

まず初めに固体レーザーについて述べる。世界最初のレーザーは 1960 年に T. H. Maiman によって作られたが、これは固体レーザーの一種であるルビーレーザーであった^[5]。ルビーは酸化アルミニウム Al_2O_3 において Al 原子の一部が Cr に置き換えられた構造を取っており、694.3 nm の赤色の光を放出する。しかしルビーレーザーは 3 準位系と呼ばれ Cr^{3+} は基底準位から励起されより高い準位に上がるが、そのすぐ下の準位に遷移し、落ちた準位と基底準位との間でレーザー遷移が生じる仕組みである (Fig. 1.8. (a))。そのため、反転分布状態のためには少なくとも全イオンの半分以上を上準位に励起する必要があるが、効率は悪くなってしまふ。

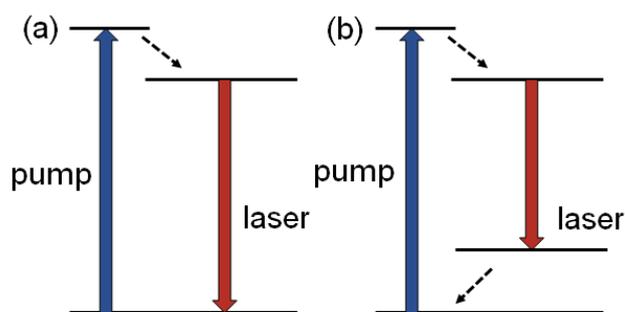


Fig. 1.8. Schematic illustration of (a) three-level laser (b) four-level laser

より効率が良いのは 4 つの準位が関わる 4 準位系であり、3 準位系と異なりレーザー遷移が起こる場合の下準位に相当するものが基底準位ではなく基底準位より高い別の準位となるため、効率よく反転分布が形成される (Fig. 1.8. (b))。その 4 準位系の代表的な例が Nd : YAG レーザーである。これはイットリウムアルミニウム

ガーネットによる結晶に Nd が添加された固体レーザーであり、1964 年に実証された^[6]。1064 nm で発振するこのレーザーは高出力であるため、医療や加工を初めとした様々な分野で使われている。

希土類を添加した光ファイバーを媒質としたファイバーレーザーも固体レーザーの一種であり、誕生したのは 1964 年であった^[7]。特徴としては他の固体レーザーと違い、小型で軽量であることや高いビーム品質を示すことが挙げられ、しかも高出力化も進んでいる^[8]。なお、希土類の中でも Er を添加する場合、1550 nm で発光するが、この波長は通信で使われる波長であり、Er 添加ファイバーは増幅器として広く使用されている。

2. 液体レーザー

利得媒質は固体に限ったものではなく液体のものもあり、中でも代表的なのは色素を使用した色素レーザーである。その発見は固体レーザーと比べると遅く 1966 年であったが^[9]、広い波長可変範囲を持つため、波長可変レーザーとして発展した。サファイアにチタンをドープした Ti:S レーザーが登場し、次第にその役割は取って代わられつつはあるのだが、可視域を広くカバーしており、帯域によっては Ti:S レーザーを初めとする他のレーザーよりも優位な場合があるため現在でも有用なレーザーである^[10]。

3. 気体レーザー

最後に利得媒質に気体を使った気体レーザーを取り上げる。CO₂ レーザーは加工などに使われる高出力なレーザーであり、共振器作製の際リフロープロセスでも使用されている。その波長は 10.6 μm であり赤外の光だが、希ガスとハロゲンの混合ガスからなるエキシマレーザーは紫外領域の光を放射する。具体的には、ArF は 193 nm、KrF は 248 nm、XeCl は 193 nm で動作し、応用先としては半導体チップの作製や角膜の手術などがある^[11]。

1.4 可飽和吸収体

可飽和吸収体は入射する光の強度 I に応じて吸収量が変化する非線形な応答を示す。強い入射光に対してはそのまま透過させるが、弱い入射光に対しては吸収が大きくなる特性

を示し、その吸収量 $\alpha(I)$ は

$$\alpha(I) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}} + \alpha_{\text{ns}} \quad (1.4.1)$$

で表わせる．ここで、 α_0 は変調深さ、 I_{sat} は飽和強度、 α_{ns} は線形損失を表す．

可飽和吸収を示す代表的な例を挙げる．1 つ目が SESAM(Semiconductor Saturable Absorber Mirror) である．これは可飽和吸収体の役割を果たす量子井戸に加え、ブラッグ反射を起こすための屈折率の高い物質と低い物質が交互に並ぶ構造を持つ．半導体製造技術の進歩もあり、可飽和吸収体としての性能が上がった一方で、高価であることや作製が複雑であることが欠点である^[12]．

そこで他の例として、グラフェンやカーボンナノチューブが挙げられる．このような物質が可飽和吸収特性を示す理由は物質のバンド構造に起因しており、通常は下準位から上準位に励起されることにより外部からのエネルギーを吸収するが、より強いエネルギーが加えられ上準位に励起される原子数の限界値を超えてしまうと徐々に吸収力が減少してしまうためである．1991 年の単層カーボンナノチューブの発見^[13] 以来、可飽和吸収体としての研究が進んでおり、例えばファブリーペロー型共振器にカーボンナノチューブを組み込むことにより、高繰り返しモード同期を実現したことは注目を集めた^[14]．

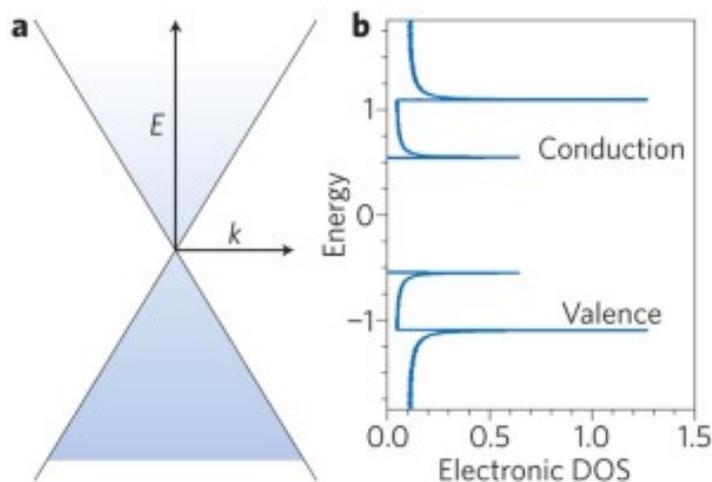


Fig. 1.9. Plots of energy–momentum relation of graphene (a) and of energy against electronic density of states (DOS) of a semiconducting nanotube (b). [A. Martinez and Z. Sun, “Nanotube and graphene saturable absorbers for fibre lasers,” *Nature Photonics* 7 (11), 842–845 (2013).]

最後に非線形偏波回転によるモードロックについて説明する．カー効果を生じさせる媒質中を伝搬する光は、自己位相変調等の効果により強度に応じて位相が回転するため、偏

光状態も変化する。この性質を利用し偏光子を上手く組み込むことにより、特定の偏光状態となった光の損失を減らすことができる。そのため高強度の光のみが伝搬し続けるように調整することで可飽和吸収特性を示す。その例を Fig. 1.10. に示す。

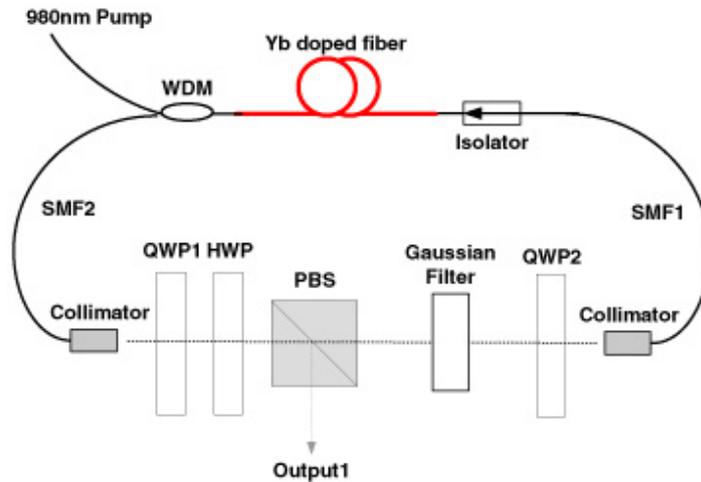


Fig. 1.10. Schematic diagram of a NPR mode-locked dissipative soliton fiber laser. WDM: wavelength division multiplexer, SMF: single mode fiber, HWP: half wave plate, QWP: quarter wave plate, PBS: polarization beam splitter. [Lingjie Kong, Xiaosheng Xiao, and Changxi Yang, “Polarization dynamics in dissipative soliton fiber lasers mode-locked by nonlinear polarization rotation,” Opt. Express **19**, 18339-18344 (2011)]

1.5 光周波数コム

1.5.1 光周波数コムとは

光周波数コムは周波数がコム (櫛) のように等間隔に離れて発生する状態である。この光周波数コムは周波数成分が等間隔に並ぶため、 n 番目の周波数 f_n は

$$f_n = f_0 + n f_r \quad (1.5.1)$$

となる。ここで f_0 はキャリアエンベロープオフセット周波数、 f_r は繰り返し周波数と呼ばれる。このような周波数特性になっている場合、時間域を考えると Fig. 1.11. のように連続するパルス列となっており、これらのパルスの間隔が $\frac{1}{f_r}$ に対応する。また、電界の包絡線がパルスを形成しているのだが、その位相はキャリアエンベロープ位相と呼ばれる。隣り合うパルスでは、その位相が $\Delta\phi$ だけずれており、

$$f_0 = f_r \frac{\Delta\phi}{2\pi} \quad (1.5.2)$$

となり f_0 の値に影響する．実験的には f_0 は自己参照法により計測できる^[15]．これは m 番目の周波数の第 2 高調波と $2m$ 番目の周波数のビート信号を調べる方法であり，これらの値を用いて

$$2f_m - f_{2m} = 2(f_0 + mf_r) - (f_0 + 2mf_r) = f_0 \quad (1.5.3)$$

として f_0 が分かる．

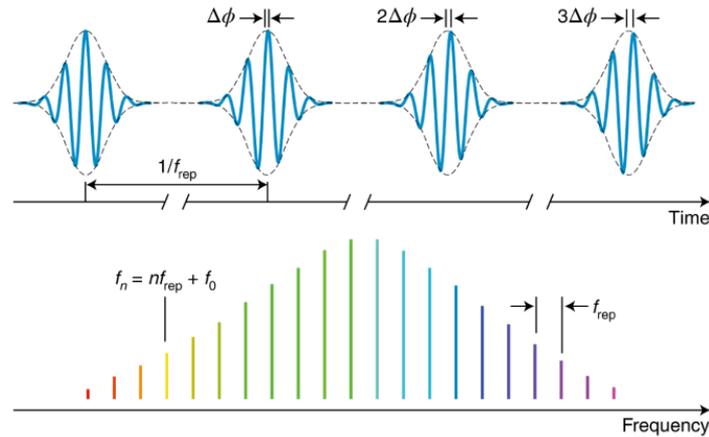


Fig. 1.11. Optical frequency comb in time and frequency domain. [N. Picqué and T. W. Hänsch, “Frequency comb spectroscopy,” *Nature Photonics* **13**(3),146–157 (2019).]

1.5.2 発生手法

光周波数コムを発生させる方法として，モード同期レーザーを使用する方法と四光波混合を用いる方法についてまとめる．まずモード同期レーザーによる方法だが，モード同期とは共振器内の縦モード成分の位相が揃っている状態である．この時，時間域では一定間隔でピークを示す波形となり，周波数軸上ではコムが生成される．モード同期を実現するための方法は能動的であるか受動的であるかに分類される．能動的な場合，音響光学変調器や電気光学変調器などの変調器を共振器内に挿入し，外部からの信号で調整される．一方受動的な例としては可飽和吸収体を用いる手法が挙げられる．そして，Fig. 1.12. のような強度によって屈折率が変化するカー効果を利用し，パルス化を実現するカーレンズモード同期も受動的なモード同期手法である．

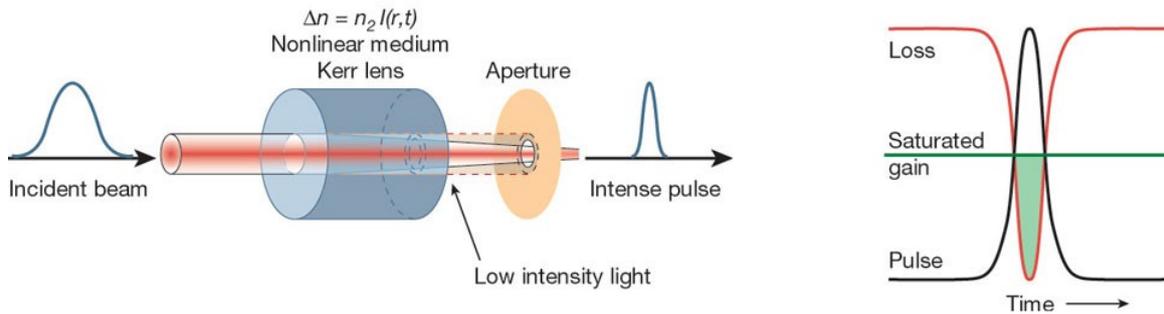


Fig. 1.12. Kerr lens modelocking is obtained through a Kerr lens at an intracavity focus in the gain medium or in another material, where the refractive index increases with intensity $\Delta n = n_2 I(r, t)$, where n_2 is the nonlinear refractive index and $I(r, t)$ the radial- and time-dependent intensity of a short-pulsed laser beam. [U. Keller, "Recent developments in compact ultrafast lasers," *Nature* **424**(6950), 831–838 (2003).]

一方、四光波混合を用いた光コムの実現も可能である。四光波混合は3次非線形効果の一種であり、周波数整合条件および位相整合条件を満たすようにして新たな周波数の光を生成する効果である。異なる2つの周波数の光からさらに異なる2つの周波数を生成する場合は非縮退過程と呼ばれるが、縮退した同じ周波数から異なる周波数を生成する場合は縮退過程と呼ばれる。これらの効果により新たな周波数が生成され、さらにそれがまた別の周波数を生成するように連続的にこの過程が起こることで、周波数軸上に広がった光コムとなる。なお、この光コムはモード同期レーザを使用して発生させる光コムと区別するために光カーコムと呼ばれる。

1.6 散逸性カーソリトン

カーコムとして多くの周波数成分が発生したとしても、位相が揃っていなければ時間域で見た場合にパルスとして発生はしない。しかし、外部からの入力光の波長を掃引することにより位相が同期されソリトンを形成することができると分かり^[16]、それ以降この実験や Lugiato-Lefever 方程式^[17]による数値解析が盛んに行われるようになった。ソリトンとは形状を変えずに安定して伝搬するパルス状の波であるが、特にこのソリトンは散逸性カーソリトンと呼ばれており、損失と利得、および分散と非線形性のつり合いにより成立する。実際の応用例としては、距離計測やチップスケールの原子時計、分光、周波数シンセサイザーなどが挙げられる^[18]。

散逸性カーソリトンの生成プロセスは第3部で後述するが、カオスな領域を経由してソリトン生成が起こるため、共振器内に存在するソリトン数はランダムとなる。共振器内の

ソリトン数が1つの場合はシングルソリトンと呼ばれ、それぞれの周波数成分が1-FSRずつ離れており高いコヒーレント性を持つことから、シングルソリトンを安定的に生成することを旨とする研究がなされてきた^[19]。一方で共振器に多数のソリトンが存在するソリトン結晶の形成にも注目が集まっている^[20]。特に、共振器内に存在できる最大数のソリトンが等間隔に並んだ状態はパーフェクトソリトン結晶と呼ばれ、その原理の解析や応用に向けた研究が進んでいる^[21]。

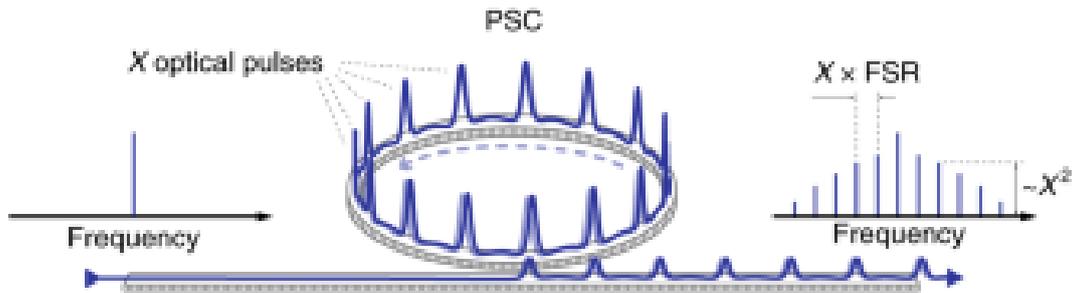


Fig. 1.13. An illustration of the PSC consisting of X pulses formed in the CW-driven nonlinear optical microcavity. [M. Karpov, M. H. Pfeiffer, H. Guo, W. Weng, J. Liu, and T. J. Kippenberg, “Dynamics of soliton crystals in optical microresonators,” *Nature Physics* **15**(10), 1071–1077 (2019).]

1.7 本研究の目的

本研究は散逸性カーソリトンに着目した。詳しい原理は第3部で解説するが、形成されるソリトンの数がランダムになってしまう問題を解決する方法として、可飽和吸収体を用いることを提案する。可飽和吸収体の1つにグラフェンがあるが、これをソリトンの発生に組み合わせた先行研究としては、シリコンナイトライドのリング共振器にグラフェンを付与し、ゲート電圧によってチューニング可能な光カーコムの研究^[22]や、グラフェンを付与したファブリーペロー型の共振器にパルス波を入射することにより単一ソリトンを確定的に発生させる研究がある^[23]。それに対し本研究では、シリカのトロイド型微小光共振器に対して連続波をポンプ光として入射し、その波長を掃引する方法でカーソリトンを発生させた場合、可飽和吸収体の効果がどのように表れるかについてLugiato-Lefever方程式を用いて数値解析をした。さらには、その式を可飽和吸収体を組み込んだエルビウム添加微小光共振器に適用できるように修正し、モード同期させるための条件を解析した。

本論文の構成は以下の通りである。第2部では、共振器と導波路の結合を計算する結合モード理論および光波の伝搬の計算に必要な不可欠なスプリットステップフーリエ

法についてまとめる．その上で，共振器での光の伝搬を記述する非線形シュレディンガー方程式およびそれを拡張した Lugiato-Lefever 方程式を導入する．第 3 部では通常の Lugiato-Lefever 方程式に可飽和吸収体を加えた場合についてシミュレーションを行い，その結果について考察する．第 4 部では第 3 部で得られた可飽和吸収体の知見を生かし，Er を添加した微小光共振器の過渡解析に応用する．そして第 5 部で結論を述べる．

第 2 部 理論

2.1 結合モード理論

この章では共振器と導波路の光を結びつける結合モード理論について述べる。まず、Fig. 2.1. に示す共振器と導波路からなるモデルを考える。

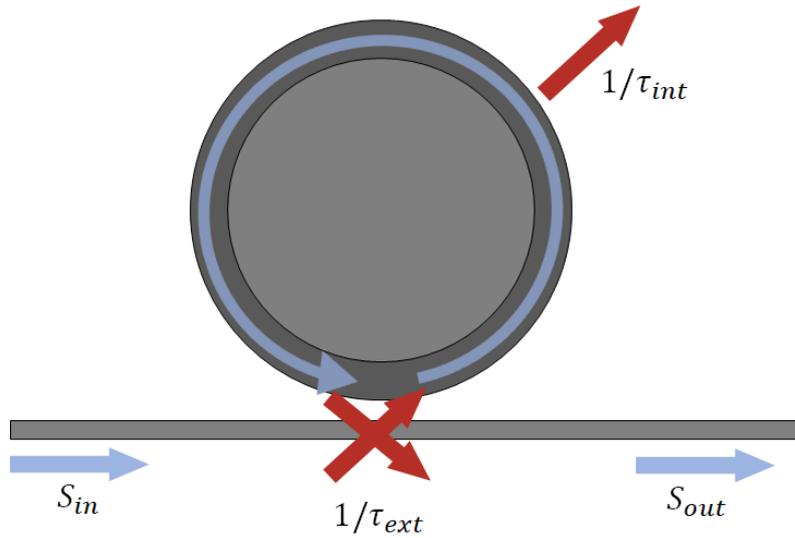


Fig. 2.1. Schematic illustration of cavity and waveguide.

ここでは共振器固有の損失 γ_{int} と、共振器と導波路との結合損失 γ_{ext} が次のように与えられる。

$$\gamma_{\text{int}} = \frac{1}{\tau_{\text{int}}} \quad (2.1.1)$$

$$\gamma_{\text{ext}} = \frac{1}{\tau_{\text{ext}}} \quad (2.1.2)$$

そのため、モード振幅 a の変化は

$$\frac{da}{dt} = j\omega_0 a - \left(\frac{1}{2\tau_{\text{int}}} + \frac{1}{2\tau_{\text{ext}}} \right) a \quad (2.1.3)$$

となる。さらに、導波路からの入力 S_{in} を考慮すると結合係数 κ を用いて

$$\frac{da}{dt} = j(\omega_0 - \omega)a - \left(\frac{1}{2\tau_{\text{int}}} + \frac{1}{2\tau_{\text{ext}}} \right) a + \kappa S_{\text{in}} \quad (2.1.4)$$

となる。ただし ω は S_{in} の角周波数であり κ は

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{\tau_{\text{ext}}}} \quad (2.1.5)$$

という関係がある。ここで (左辺) = 0 として定常状態に対する解を考えると

$$a = \frac{\kappa}{j(\omega_0 - \omega) - \left(\frac{1}{2\tau_{\text{int}}} + \frac{1}{2\tau_{\text{ext}}}\right)} \quad (2.1.6)$$

となる。出力光 S_{out} は

$$S_{\text{out}} = S_{\text{in}} - \kappa a \quad (2.1.7)$$

であるので、入力光と出力光の関係から透過率 T を計算し整理すると

$$T = \left| \frac{S_{\text{out}}}{S_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{4}(\gamma_{\text{int}} - \gamma_{\text{ext}})^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{4}(\gamma_{\text{int}} + \gamma_{\text{ext}})^2} \quad (2.1.8)$$

となる。

まず、この透過率特性の特徴を調べるために、特定の条件下での透過率の変化を Fig. 2.2. に示す。

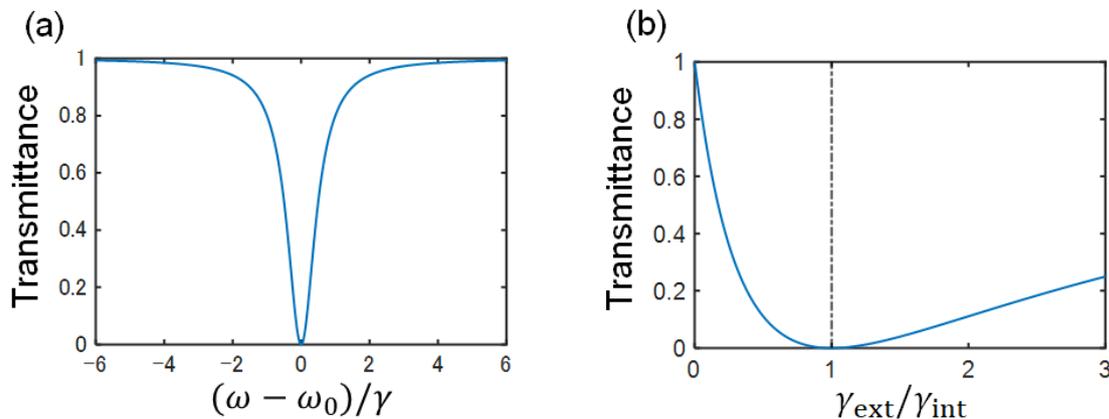


Fig. 2.2. (a) Transmittance spectrum in the critical coupling condition. (b) Minimum transmittance as a function of $\gamma_{\text{ext}}/\gamma_{\text{int}}$.

ここで Fig. 2.2.(a) は $\gamma_{\text{int}} = \gamma_{\text{ext}}$ であると仮定し、さらに

$$\gamma = \gamma_{\text{int}} + \gamma_{\text{ext}} \quad (2.1.9)$$

と定義し、横軸に $(\omega_0 - \omega)/\gamma$ を縦軸に透過率 T としたグラフである。 $\omega_0 = \omega$ の時、最小値 0 となり、このような $\gamma_{\text{int}} = \gamma_{\text{ext}}$ という条件を満たすことを **critical coupling** と言う。

一方で Fig. 2.2.(b) は $\omega_0 = \omega$ を満たす時の透過率を横軸を $\gamma_{\text{ext}}/\gamma_{\text{int}}$ として描いたグラフである。 $\gamma_{\text{int}} = \gamma_{\text{ext}}$, すなわち $\gamma_{\text{ext}}/\gamma_{\text{int}} = 1$ の場合, **critical coupling** で最小値 0 となるが, それ以外の場合には透過率の最小値はこれより大きな値となる。特にこれらは, $\gamma_{\text{int}} > \gamma_{\text{ext}}$, すなわち $\gamma_{\text{ext}}/\gamma_{\text{int}} < 1$ の場合は **under coupling** と呼ばれ, $\gamma_{\text{int}} < \gamma_{\text{ext}}$, すなわち $\gamma_{\text{ext}}/\gamma_{\text{int}} > 1$ の場合は **over coupling** と呼ばれる。

実験でこれらの結合における割合を変化させるには, 導波路と共振器の距離を変化させればよい。 **under coupling** はその距離をより大きく, **over coupling** はその距離をより小さくすることに対応する (Fig. 2.3.)。

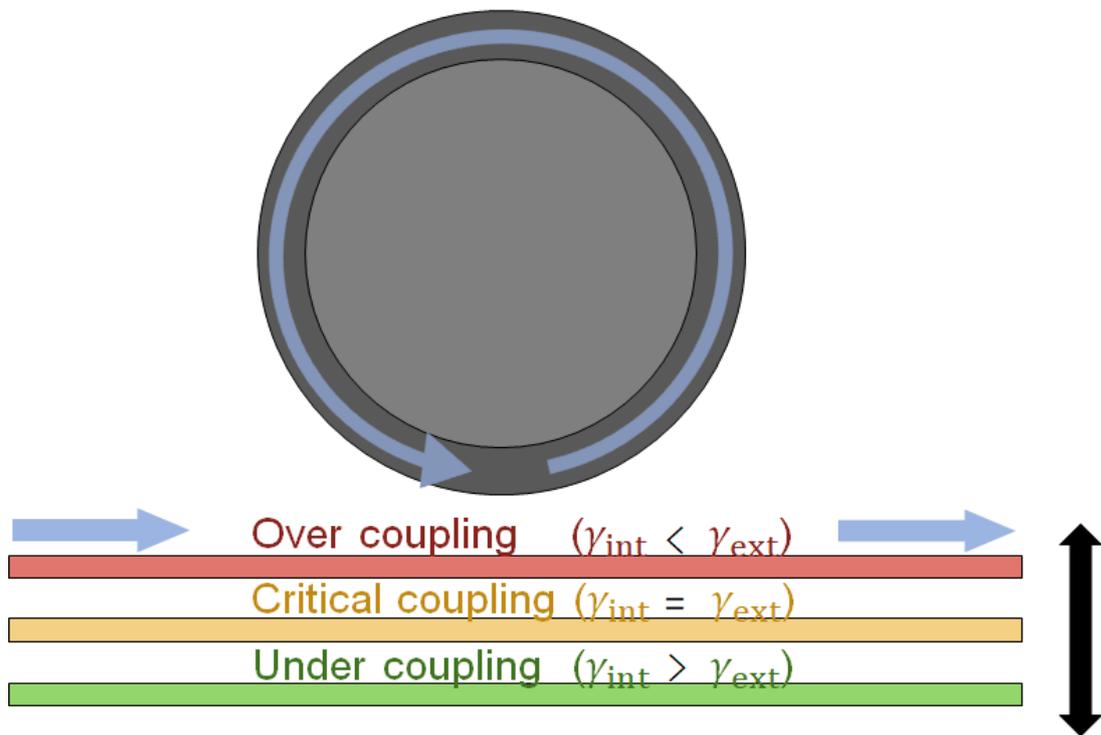


Fig. 2.3. Schematic illustration of coupling condition. It depends on the distance between a cavity and a waveguide.

2.2 スプリットステップフーリエ法

2.2.1 アルゴリズム概要

光波の伝搬は, 非線形シュレディンガー方程式を解くことによりシミュレーションをすることができる。そこで必要となるのがスプリットステップフーリエ法である^[24]。

簡単な例として光ファイバー中での伝搬を取り上げる。ファイバー中での分散とカー効果のみを考慮すると非線形シュレディンガー方程式は

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma|A|^2 A \quad (2.2.1)$$

で与えられる。実際に伝搬する光は高次の分散や減衰、ラマン効果なども考える必要があり、これらの効果を考慮する場合は対応する項を入れて計算しなければならないため、見通しが良くなるよう非線形シュレディンガー方程式を

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N}) A \quad (2.2.2)$$

$$\hat{D} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} \quad (2.2.3)$$

$$\hat{N} = i\gamma|A|^2 \quad (2.2.4)$$

という形で表す。ここで \hat{D} と \hat{N} はそれぞれ、線形演算子と非線形演算子を表す。スプリットステップフーリエ法では線形演算子と非線形演算子が互いに影響しないとして別々に計算を行うため、各項を \hat{D} と \hat{N} に分類した。具体的には、光が z から微小距離 h だけ進む場合は次のように計算する。

1. 線形性のみを考慮した $\frac{h}{2}$ 伝搬

非線形項を無視するため、(2.2.2) 式は $\frac{\partial A}{\partial z} = \hat{D}A$ となる。よって

$$A\left(z + \frac{h}{2}, T\right) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T) \quad (2.2.5)$$

2. 非線形性のみを考慮

線形項を無視するため、(2.2.2) 式は $\frac{\partial A}{\partial z} = \hat{N}A$ となる。よって

$$A\left(z + \frac{h}{2}, T\right) = \exp(h\hat{N}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T) \quad (2.2.6)$$

3. 線形性のみを考慮した $\frac{h}{2}$ 伝搬

非線形項を無視するため、(2.2.2) 式は再び $\frac{\partial A}{\partial z} = \hat{D}A$ となる。よって

$$A\left(z + \frac{h}{2}, T\right) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \exp(h\hat{N}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T) \quad (2.2.7)$$

このようにして微小距離 h 進む計算を繰り返すことにより、長距離の伝搬も数値解析することが可能である。なお、 \hat{D} のような時間微分が入った演算子はフーリエ変換を用いることで計算する。フーリエ変換とフーリエ逆変換はそれぞれ

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.2.8)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.2.9)$$

であるので、時間域での微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left\{ \frac{d}{dt} \exp(i\omega t) \right\} d\omega \\ &= i\omega \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \right\} \\ &= i\omega \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

であることから

$$\mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = i\omega F(\omega) \quad (2.2.11)$$

という関係が導かれる。これを用いて、 $A(z, T)$ をフーリエ変換で周波数域に変換し、そこで \hat{D} による影響を加え、逆フーリエ変換を用いて時間域に戻すという手順で計算する。

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T) &= \exp\left[\frac{h}{2}\left\{-\frac{i}{2}\beta_2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right\}\right] A(z, T) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \exp\left[\frac{h}{2}\left\{\frac{i}{2}\beta_2\omega^2\right\}\right] \mathcal{F}A(z, T) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

フーリエ変換は高速フーリエ変換 (FFT) により高速に計算できるため、計算速度が速いことがスプリットステップフーリエ法の特徴として挙げられる。

2.2.2 計算精度

これまで h 進む場合に $\frac{h}{2}$ ずつ伝搬させ、その間で \hat{N} を考えたが、これは誤差を減らし精度を高めるためである。スプリットステップフーリエ法は本来同時に考えるべき線形作用と非線形作用を別々に計算するため、誤差が生じることは避けられない。誤差は増える

がまとめて h 伝搬させ、非線形効果をその都度計算することを繰り返した場合でも計算は可能である。別々に分ける場合と別々に分けない場合はそれぞれ、

$$A(z+h, T) = \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) A(z, T) \quad (2.2.13)$$

$$A(z+h, T) = \exp\{h(\hat{D} + \hat{N})\} A(z, T) \quad (2.2.14)$$

となることから、この差が問題となる。ベーカー・キャンベル・ハウズドルフの公式と呼ばれる

$$\exp(\hat{a}) \exp(\hat{b}) = \exp\left(\hat{a} + \hat{b} + \frac{1}{2}[\hat{a}, \hat{b}] + \frac{1}{12}[\hat{a} - \hat{b}, [\hat{a}, \hat{b}]] + \dots\right) \quad (2.2.15)$$

の関係を $\hat{a} = h\hat{D}$ および $\hat{b} = h\hat{N}$ として用いると (2.2.13) 式と (2.2.14) 式の主要な差 e は

$$e = \frac{1}{2}[h\hat{D}, h\hat{N}] = \frac{1}{2}h^2[\hat{D}, \hat{N}] \quad (2.2.16)$$

で与えられる。ただし、 $[\hat{a}, \hat{b}]$ は演算子の交換関係を表しており

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} \quad (2.2.17)$$

である。誤差をより小さくするには微小距離 h をより小さくしなければならない。あるいは前節のように $h/2$ ずつ伝搬させる方法、また台形公式を用いて非線形項をより正確に計算する方法がある^[24]。

2.3 微小光共振器のモデル化

2.3.1 Lugiato-Lefever 方程式

光ファイバ中での光の伝搬は、非線形シュレディンガー方程式が主に用いられ、例えば分散とカー効果を考慮すると、ゆっくり変動する包絡線振幅 $A(z, T)$ は

$$\frac{\partial}{\partial z} A(z, T) = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} A(z, T) + i\gamma |A|^2 A(z, T) \quad (2.3.1)$$

と表される^[24]。 β_2 は群速度分散、 γ は非線形光学係数である。共振器中での光の伝搬も同様に、1周もしくは数周する間に受ける光が受ける影響を考え計算することができる。Haus のマスター方程式^[25]より、共振器を1周する時間を T_r 、共振器の1周の長さを L とすると、

$$T_r \frac{\partial}{\partial T} A(T, t) = -\frac{iL}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(T, t) + iL\gamma |A|^2 A(T, t) \quad (2.3.2)$$

と表される．ここで T は Slow time, t は Fast time と呼ばれ, A に対する変数の取り方が違うことに注意する．ここから更に別の効果を考慮する前に分散とカー効果という基本的な効果に関してまとめる．

1. 分散

まず右辺第 1 項の分散であるが, この効果によって仮にパルスを伝搬するとしてもそれが原因でパルス幅を広げる作用がある．そしてこの波長に依存にする分散は, 材料分散と構造分散に分類される．

▷ 材料分散

今回考察する共振器の材料はシリカであるが, その屈折率が伝搬する光の波長によって変化するため, 分散が生じる．屈折率 n の波長 λ に対する依存性はセルマイヤーの分散式で表されており,

$$n^2 - 1 = \frac{0.6961663\lambda^2}{\lambda^2 - (0.0684043)^2} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - (0.1162414)^2} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - (9.896161)^2} \quad (2.3.3)$$

である^[26]．この屈折率をもとに分散定数 D は

$$D = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (2.3.4)$$

と定まる．この D は単位としては ($\text{ps nm}^{-1}\text{km}^{-1}$) が用いられる場合が多いが, これは波長 1 nm 異なる光が 1 km 伝搬されるのにかかる時間の差を表す．そして, β_2 とは

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (2.3.5)$$

という関係があることから, β_2 が求められる．

▷ 構造分散

構造分散とは導波路の構造により決定される分散であり, 共振周波数のずれから求めることができる．トロイド共振器の半径を R , m 番目の共振周波数を f_m とすると

$$\beta_2 = -\frac{1}{4\pi^2 R \Delta f_m^3} \Delta(\Delta f_m) \quad (2.3.6)$$

で求められる^[27]。ただしここで

$$\Delta f_m = \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{2} \quad (2.3.7)$$

$$\Delta(\Delta f_m) = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1} \quad (2.3.8)$$

であり、 f_m での分散は共振周波数及びその前後のモード番号の共振周波数を求めることで、計算できる。共振周波数を求めるためには有限要素法 (FEM) と呼ばれる解析が使われ、今回の研究においては COMSOL Multiphysics というソフトを用いて計算を実行した。

この2つの分散の和によって β_2 が求まる。より正確に計算するためには高次の分散も考慮する必要があるが、今回の数値解析においてはその影響は小さいとして考慮していない。なお、 β_2 が正の場合を正常分散と言い、負の場合を異常分散と言う。特に正常分散でのモード同期状態はダークパルスと呼ばれる。共振器のサイズを変えた際の分散の例を Fig. 2.4. に示す。ただし、共振器全体の直径であるメジャー直径とトロイド型共振器の断面の直径であるマイナー直径の比を 10 に固定し計算しており、Fig. 2.4. での横軸はメジャー直径である。

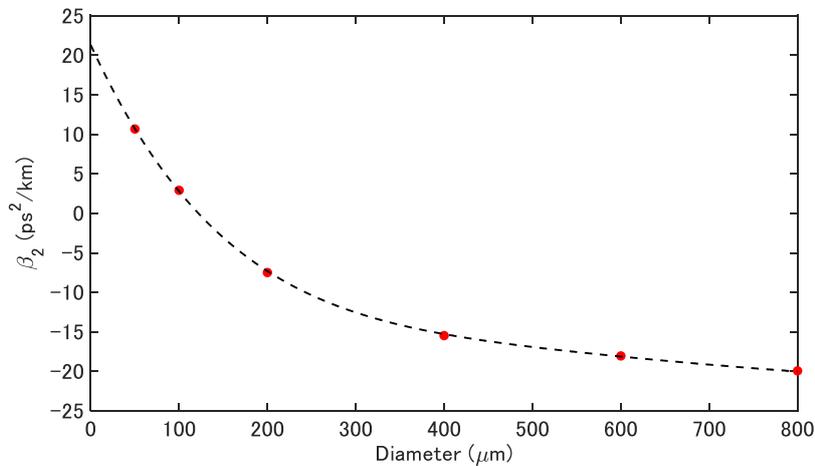


Fig. 2.4. Dispersion when diameter is changed.

直径が小さい場合は正常分散であるが、直径が大きくなるほど分散は小さくなり 100 μm 付近で異常分散となる。そして直径を大きくするにつれ分散は強い異常分散となるが、直径を増やすことによる分散の変化は次第に小さくなる。

2. カー効果

右辺第 2 項はカー効果を表しており，その定数 γ は非線形屈折率 n_2 ，角周波数 ω_0 ，光速 c ，実効断面積 A_{eff} を用いて，

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{\text{eff}}} \quad (2.3.9)$$

で与えられる．非線形屈折率 n_2 は 3 次の非線形光学効果により屈折率 n_0 から光強度 I に応じて

$$n = n_0 + n_2 I \quad (2.3.10)$$

と変化するが，その際の係数である．また実効断面積 A_{eff} は

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left(\iint_{-\infty}^{\infty} |E(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\iint_{-\infty}^{\infty} |E(x, y)|^4 dx dy} \quad (2.3.11)$$

で求めることができ，電界 $E(x, y)$ の閉じ込められる程度を示している．トロイド共振器の断面における電界の例を Fig. 2.5. に示す．

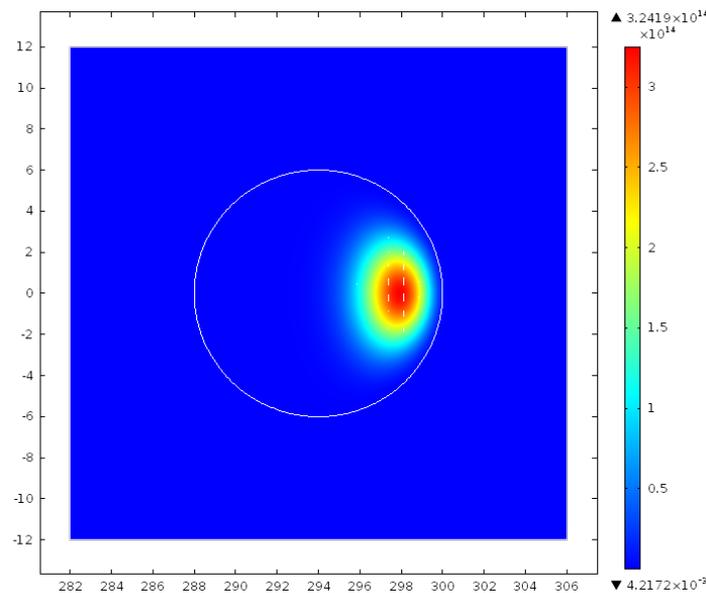


Fig. 2.5. Cross section of toroidal microresonator.

四光波混合による利得を用いてコムを形成させる場合，非線形シュレディンガー方程式に加え外部からの入力光およびそのデチューニングを考慮しなければならない．これによ

り Lugiato-Lefever 方程式 (LLE) と呼ばれる

$$T_r \frac{\partial}{\partial T} A(T, t) = \left(-l - i\delta_0 - \frac{iL}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + iL\gamma|A|^2 \right) A(T, t) + \sqrt{\theta} A_{\text{in}} \quad (2.3.12)$$

を得る. ここで T_r は共振器を 1 周する時間, l は損失, δ_0 はデチューニング, θ は結合係数, A_{in} は外部からの入力光を示す. この式はカーコムの発生など様々な研究に用いられており, 例えば下図はオクターブに広がるマイクロコムに関する研究であるが, LLE によるシミュレーションは実際の実験結果とも一致している [28].

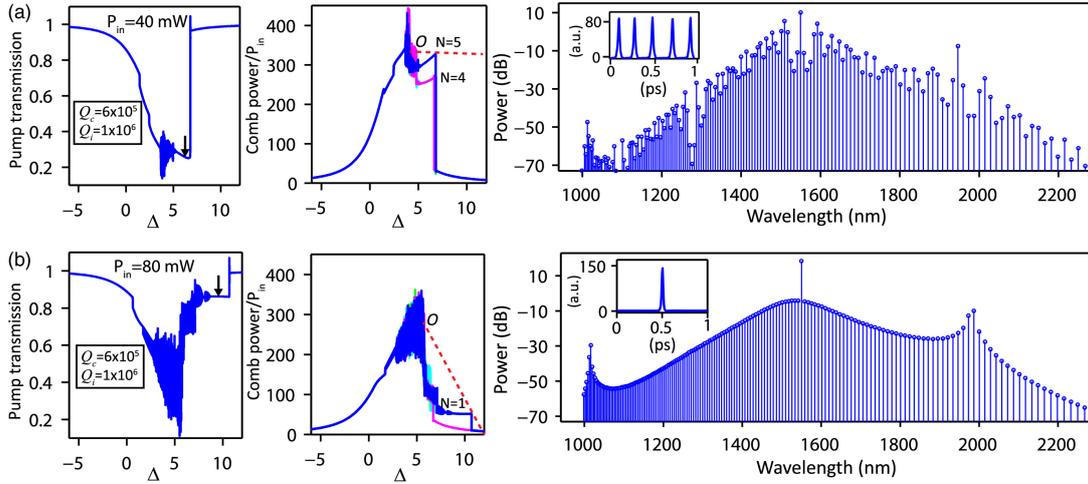


Fig. 2.6. LLE simulation for a Si_3N_4 microring with thickness of 600 nm and ring width of 1760 nm for (a) pump power of 40 mW and for (b) pump power of 80 mW. [Q. Li, T. C. Briles, D. A. Westly, T. E. Drake, J. R. Stone, B. R. Ilic, S. A. Diddams, S. B. Papp, and K. Srinivasan, “Stably accessing octave-spanning microresonator frequency combs in the soliton regime,” *Optica* **4**(2), 193–203 (2017).]

2.3.2 Er 添加微小光共振器

一方, 共振器に Er を添加すると, それが利得媒質となり発振し, さらに可飽和吸収体が付与すると受動モード同期されることとなる. これらの効果および損失の影響を加えると, 利得 g , 共振器の損失 l , 可飽和吸収体による損失 α を用いて

$$T_r \frac{\partial}{\partial T} A(T, t) = \left(-\frac{iL}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + iL\gamma|A|^2 \right) A(T, t) + (g \times f - (l + \alpha)) A(T, t) \quad (2.3.13)$$

となる.

ここで f は利得の周波数特性である。今回のシミュレーションでは利得が周波数軸上でローレンツ型を示すと仮定し、利得帯域幅 ω_g を用いて

$$f = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \quad (2.3.14)$$

とした。

また、 l と α はどちらも損失であるが、 l は共振器の線形な損失であるのに対し α は可飽和吸収体による非線形な損失である。 l は共振器の Q 値から算出が可能であり、また α は可飽和吸収体の線形な損失は l に含まれるとし

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}} \quad (2.3.15)$$

となる。

利得の計算は、定常状態において

$$g = g_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{P_{\text{average}}}{P_{\text{sat}}^g}} \right) \quad (2.3.16)$$

との解を得ることができる。ここで g_0 は小信号利得、 P_{average} は共振器内平均パワー、 P_{sat}^g は利得の飽和パワーを表す。しかし、より厳密に変化する過程を知るためにはレート方程式を解き利得を計算する必要がある。そこで Er に対するエネルギー準位を Fig. 2.7. に示す。

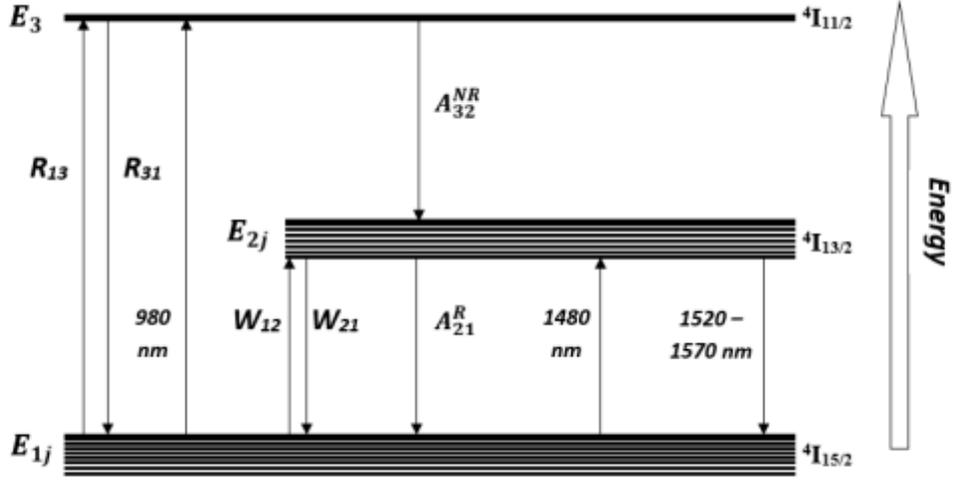


Fig. 2.7. Energy level illustration for Er-doped silica fiber [J. A. Bebawi, I. Kandas, M. A. El-Osairy, and M. H. Aly, “A comprehensive study on EDFA characteristics: temperature impact,” Applied Sciences **8**(9), 1640 (2018).]

このように 980 nm もしくは 1480 nm の波長の光で励起するのだが、今回は 1480 nm のポンプ光による励起を考え、その結果 1550 nm の光がシグナル光として放射されるとする。さらに、Er は一般的にエネルギー準位が低い方から順に E_1 , E_2 , E_3 として 3 準位系と考えられるが、 E_3 から E_2 への遷移が非常に速く、 E_3 に励起されている原子が常にほとんど無いと考えられるため、2 準位であるとみなし計算を進める。上準位原子数を N_2 、下準位原子数を N_1 とすると、 N_2 に対するレート方程式は

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = -\frac{N_2}{\tau} - \frac{1}{A_{\text{eff}}} \left(\frac{\partial P_p}{\partial z} + \frac{\partial P_s}{\partial z} \right) \quad (2.3.17)$$

となる。ただし、 τ は上準位寿命、 P_p はポンプ光の単位時間あたりの光子の数、 P_s はシグナル光の単位時間あたりの光子の数を表す。さらに、位置 z に関する光子数の変化は、シグナル光に対する吸収断面積 σ_s^a 、シグナル光に対する放出断面積 σ_s^e 、ポンプ光に対する吸収断面積 σ_p^a 、ポンプ光に対する放出断面積 σ_p^e を用いて

$$\frac{\partial P_p}{\partial z} = [\sigma_p^e N_2 - \sigma_p^a N_1] P_p(z, t) \quad (2.3.18)$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = [\sigma_s^e N_2 - \sigma_s^a N_1] P_s(z, t) \quad (2.3.19)$$

となる。従って (2.3.17) 式に (2.3.18) 式と (2.3.19) 式を代入することにより

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = -\frac{N_2}{\tau} - \frac{1}{A_{\text{eff}}} ([\sigma_p^e N_2 - \sigma_p^a N_1] P_p(z, t) + [\sigma_s^e N_2 - \sigma_s^a N_1] P_s(z, t)) \quad (2.3.20)$$

という微分方程式が得られる．この式から微小時間経過した後の N_2 が分かり，Er 原子数の合計 N_{Er} は一定であるため N_1 を

$$N_1 = N_{\text{Er}} - N_2 \quad (2.3.21)$$

として求めることができる．上準位と下準位の原子数を求めることができれば，1 周当たりの利得は

$$g = (\sigma_s^e N_2 - \sigma_s^a N_1) L \quad (2.3.22)$$

となるため，微小時間経過した後の利得が分かる．これを用いて非線形シュレディンガー方程式

$$T_r \frac{\partial}{\partial T} A(T, t) = \left(-\frac{iL}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + iL\gamma |A|^2 \right) A(T, t) + (g \times \text{filter} - (l + \alpha)) A(T, t) \quad (2.3.23)$$

を解くことにより波形が変化しシグナル光のパワーも変わるため，その解を用いて再度レート方程式を解く．以上のことを繰り返すことにより，光が数 100 万回周回した場合をシミュレーションした．以上のことをまとめ，過渡解析を次のようにして計算する．

1. シグナル光のパワーを代入し，レート方程式から上(下)準位原子数を求める．
2. 利得を計算する．
3. 非線形シュレディンガー方程式を解く．
4. 1～3 を繰り返す．

なお，レート方程式 (2.3.20) 式は (左辺) = 0 とした定常状態において

$$N_2 = \frac{\frac{P_s \sigma_s^a \tau}{A_{\text{eff}}} + \frac{P_p \sigma_p^a \tau}{A_{\text{eff}}}}{1 + \frac{P_s (\sigma_s^a + \sigma_s^e) \tau}{A_{\text{eff}}} + \frac{P_p (\sigma_p^a + \sigma_p^e) \tau}{A_{\text{eff}}}} N_{\text{Er}} \quad (2.3.24)$$

$$N_1 = \frac{1 + \frac{P_s \sigma_s^e \tau}{A_{\text{eff}}} + \frac{P_p \sigma_p^e \tau}{A_{\text{eff}}}}{1 + \frac{P_s (\sigma_s^a + \sigma_s^e) \tau}{A_{\text{eff}}} + \frac{P_p (\sigma_p^a + \sigma_p^e) \tau}{A_{\text{eff}}}} N_{\text{Er}} \quad (2.3.25)$$

となる．従って，これらの式を (2.3.22) 式に代入することにより，

$$g = \frac{\frac{P_p \sigma_p^a \sigma_s^e \tau}{A_{\text{eff}}} - \frac{P_p \sigma_p^e \sigma_s^a \tau}{A_{\text{eff}}} - \sigma_s^a}{1 + \frac{P_p (\sigma_p^a + \sigma_p^e) \tau}{A_{\text{eff}}} + \frac{P_s (\sigma_s^a + \sigma_s^e) \tau}{A_{\text{eff}}}} L N_{\text{Er}} \quad (2.3.26)$$

を得る．ここで P_s は共振器内の平均パワーを P_{average} ，プランク定数を h ，周波数を ν_0 とすると

$$P_s = \frac{P_{\text{average}}}{h\nu_0} \quad (2.3.27)$$

で表すことができるため、これを代入し、さらに右辺の分母分子をそれぞれ $1 + \frac{P_p(\sigma_p^a + \sigma_p^e)\tau}{A_{\text{eff}}}$ で割ると

$$g = \frac{\frac{\frac{P_p \sigma_p^a \sigma_s^e \tau}{A_{\text{eff}}} - \frac{P_p \sigma_p^e \sigma_s^a \tau}{A_{\text{eff}}} - \sigma_s^a}{1 + \frac{P_p(\sigma_p^a + \sigma_p^e)\tau}{A_{\text{eff}}}}}{\frac{\frac{P_{\text{average}}(\sigma_s^a + \sigma_s^e)\tau}{A_{\text{eff}}} h\nu_0}{1 + \frac{P_p(\sigma_p^a + \sigma_p^e)\tau}{A_{\text{eff}}}}} LN_{\text{Er}} \quad (2.3.28)$$

となる。従って、

$$g_0 = \frac{\left(\frac{P_p \sigma_p^a \sigma_s^e \tau}{A_{\text{eff}}} - \frac{P_p \sigma_p^e \sigma_s^a \tau}{A_{\text{eff}}} - \sigma_s^a \right)}{1 + \frac{P_p(\sigma_p^a + \sigma_p^e)\tau}{A_{\text{eff}}}} LN_{\text{Er}} \quad (2.3.29)$$

$$P_{\text{sat}}^g = \frac{1 + \frac{P_p(\sigma_p^a + \sigma_p^e)\tau}{A_{\text{eff}}}}{\frac{(\sigma_s^a + \sigma_s^e)\tau}{A_{\text{eff}}} h\nu_0} \quad (2.3.30)$$

と置くことで、(2.3.28) 式は

$$g = g_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{P_{\text{average}}}{P_{\text{sat}}^g}} \right) \quad (2.3.31)$$

と整理できるため、定常状態の場合と対応付けが可能となる。すなわち、レート方程式の定常状態を仮定し計算する場合には (2.3.29) 式と (2.3.30) 式で導かれるパラメータ P_{sat}^g と g_0 を用いて計算することができる。

第3部

可飽和吸収体の効果を付与した LLE

3.1 ソリトン発生の原理

散逸性カーソリトンは、ポンプ光の波長を掃引することにより達成されると説明した。その場合のソリトン形成の様子を Fig. 3.1. に示す。

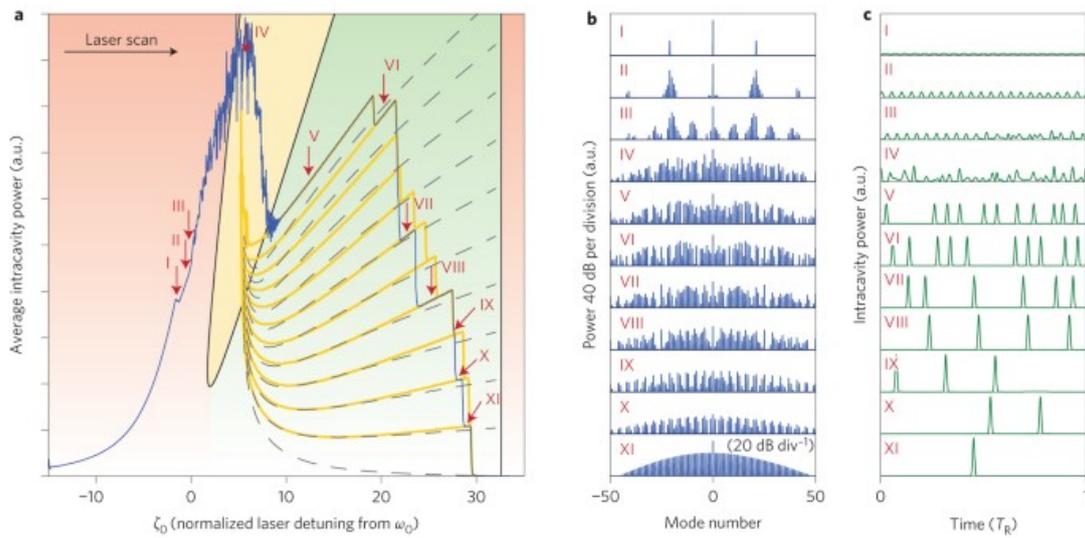


Fig. 3.1. **a**, Average intracavity power during a simulated laser scan (101 simulated modes) over a resonance in a MgF_2 resonator. The step features are well reproduced. The orange lines trace out all possible evolutions of the system during the scan. The dashed lines show an analytical description of the steps. The green area corresponds to the area in which solitons can exist, the yellow area allows for breather solitons with a time-variable envelope; solitons cannot exist in the red area. **b,c**, Optical spectra and intracavity powers for the different positions I–XI in the laser scan. [T. Herr, V. Brasch, J. D. Jost, C. Y. Wang, N. M. Kondratiev, M. L. Gorodetsky, and T. J. Kippenberg, “Temporal solitons in optical microresonators,” *Nature Photonics* **8**(2), 145–152 (2014).]

ポンプ光波長を掃引する際の共振器内部における平均パワーの変化は特徴的であり、まず四光波混合により新たな周波数成分が生じ、周期的な時間波形であるチューリングパターンとなる。その後、徐々に平均パワーは上昇し共振器内部のパワーが激しく変動するが、このカオスな領域を抜けるとソリトンが形成され共振器内のパワーは安定する。しか

し、そのソリトンは波長掃引を続けるとやがてその数が減少しソリトンステップと呼ばれる階段状の変化し、最終的にはソリトンは消滅する。

ここでデチューニングとは共振周波数とポンプ光の周波数の差を示す。ただし共振周波数はカー効果や熱の影響により一定の値を取らずに変化するため実効的な値を考える必要がある。

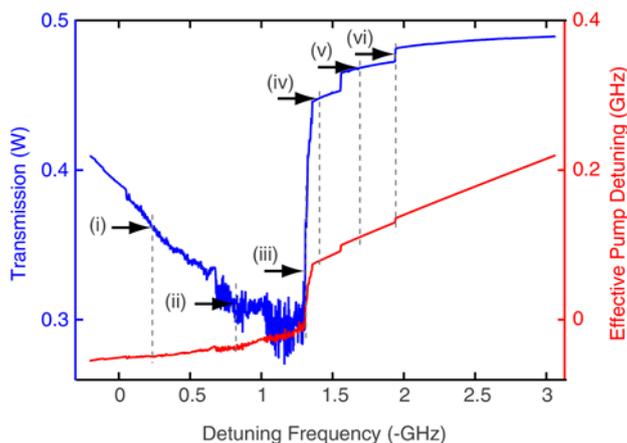


Fig. 3.2. Transmission and effective pump-cavity detuning when scanning a pump laser over a cavity resonance. Effective pump-cavity detuning subtracts the resonance shift due to the Kerr effect and free-carrier dispersion from pump detuning. A series of abrupt transmission steps occur in the effective red-detuning regime. [M. Yu, Y. Okawachi, A. G. Griffith, M. Lipson, and A. L. Gaeta, “Mode-locked mid-infrared frequency combs in a silicon microresonator,” *Optica* **3**(8), 854–860 (2016).]

1つ目のカー効果による影響は、非線形屈折率 n_2 および単位面積当たりのパワー I を用いて屈折率変化 Δn が

$$\Delta n = n_2 I \quad (3.1.1)$$

となると考えると、共振周波数が増える理由を理解しやすい。また、2つ目の熱による影響では屈折率 n および共振器の半径 r が温度によって変化することにより共振周波数も変化する（ただし、今回のシミュレーションでは熱による影響は考慮していない）。より詳しくは膨張係数 ϵ 、導波路伝搬定数 c_1 、共振器の屈折率 n 、 N 番目の共振波長 λ_r は

$$N = \frac{2\pi r c_1 (1 + \epsilon \Delta T)}{\lambda_r / \left(n_0 + \frac{dn}{dT} \Delta T \right)} \quad (3.1.2)$$

という関係があり、新しい共振波長は元の波長 λ_0 を用いて温度の関数として表すことが

できるため

$$\lambda_r(\Delta T) \simeq \lambda_0 \left[1 + \left(\epsilon + \frac{dn}{n_0 dT} \right) \Delta T \right] \quad (3.1.3)$$

$$\equiv \lambda_0(1 + a\Delta T) \quad (3.1.4)$$

となる^[29]。このように実効的なデチューニングを算出し共振周波数とポンプ光の周波数を比較した場合、ポンプ光の周波数が共振周波数よりも高い場合は **blue-detuning** と呼ばれ、その逆にポンプ光の周波数が共振周波数よりも低い場合は **red-detuning** と呼ばれる。

ポンプ光は短波長側から長波長側に掃引すると想定し計算を行ったが、カー効果を考慮すると共振器内部パワーが徐々に大きくなるため、共振波長も長波長側にシフトする。そのため、ポンプ光の波長が元の共振周波数に達しても依然 **blue-detuning** であり、更に波長を掃引し共振周波数とポンプ光の周波数が一致した場合に、大きな変化が生じソリトン形成する。このようなソリトン形成およびソリトンステップが生じる理由は、Fig. 3.3. に表すような双安定曲線において波長を掃引することにより、共振周波数とポンプ光の周波数が一致した後はその解から外れ、別のソリトン解に移行することから理解できる。

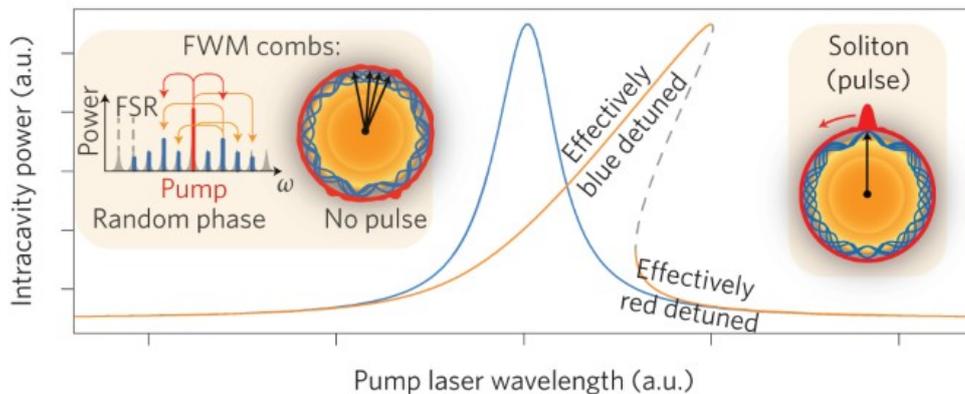


Fig. 3.3. Bistable intracavity power as a function of laser detuning for a linear (blue) and a nonlinear resonator (orange). The dashed line marks an unstable regime. [T. Herr, V. Brasch, J. D. Jost, C. Y. Wang, N. M. Kondratiev, M. L. Gorodetsky, and T. J. Kippenberg, “Temporal solitons in optical microresonators,” *Nature Photonics* **8**(2), 145–152 (2014).]

3.2 シミュレーション実行例

これまで説明したように、ソリトンが形成されるのはカオス領域を通った後であるため、ソリトンの数は同じパラメータを使用し計算した場合にも常に同じ値とはならずラン

ダムとなる．そこで可飽和吸収体を用いることによりソリトンを安定的に生成することを目的とし，LLE に可飽和吸収体の効果を加えた式を用いてシミュレーションを行った．その式は

$$T_r \frac{\partial}{\partial T} A(T, t) = \left(-\frac{\alpha_{\text{tot}}}{2} - q - i\delta_0 - \frac{iL}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + iL\gamma|A|^2 \right) A(T, t) + \sqrt{\theta} A_{\text{in}} \quad (3.2.1)$$

である．可飽和吸収体を用いる場合は

$$q = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{|A|^2}{P_{\text{sat}}}} \quad (3.2.2)$$

として計算し，可飽和吸収体を用いない場合は

$$q = 0 \quad (3.2.3)$$

とすることで比較できる．使用したパラメータは以下である．

Table 3.1. Parameters used in the simulation for LLE.

| Parameter | Value |
|--------------------------------------|--|
| Cavity length L | $600\pi \mu\text{m}$ |
| Free spectral range | 110 GHz |
| Intrinsic Q | 2×10^8 |
| External Q | 2×10^8 |
| Modulation depth α_0 | 4×10^{-3} |
| Refractive index n_0 | 1.44 |
| Nonlinear refractive index n_2 | $2.2 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ |
| Effective mode area A_{eff} | $29.74 \mu\text{m}^2$ |
| Dispersion β_2 | $-17.7 \text{ ps}^2/\text{km}$ |
| Saturation energy I_{sat} | $15 \text{ MW}/\text{cm}^3$ |
| Pump power P_{pump} | 100 mW |
| Number of mode N | 2^9 |

3.2.1 可飽和吸収体を用いない場合

まず，可飽和吸収体を用いない場合の結果を以下に示す．デチューニング量は規格化した値を用い $\delta = 2\delta_0/\alpha_{\text{tot}}$ とした．

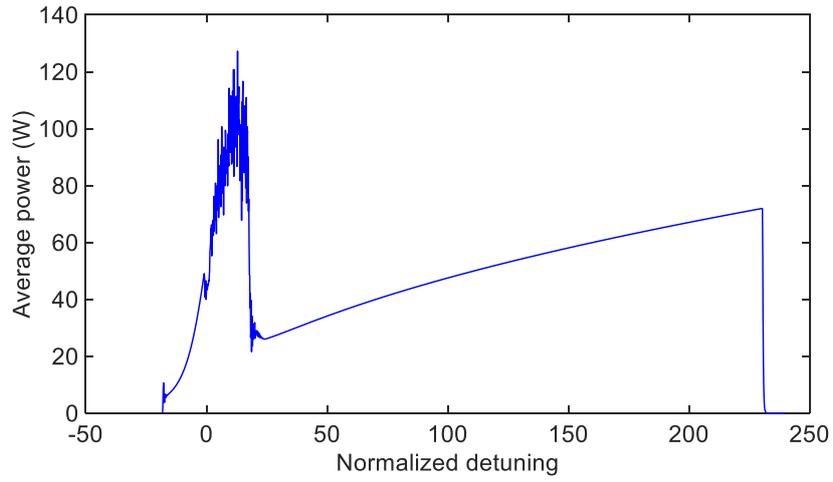


Fig. 3.4. Intracavity power as a function of normalized detuning.

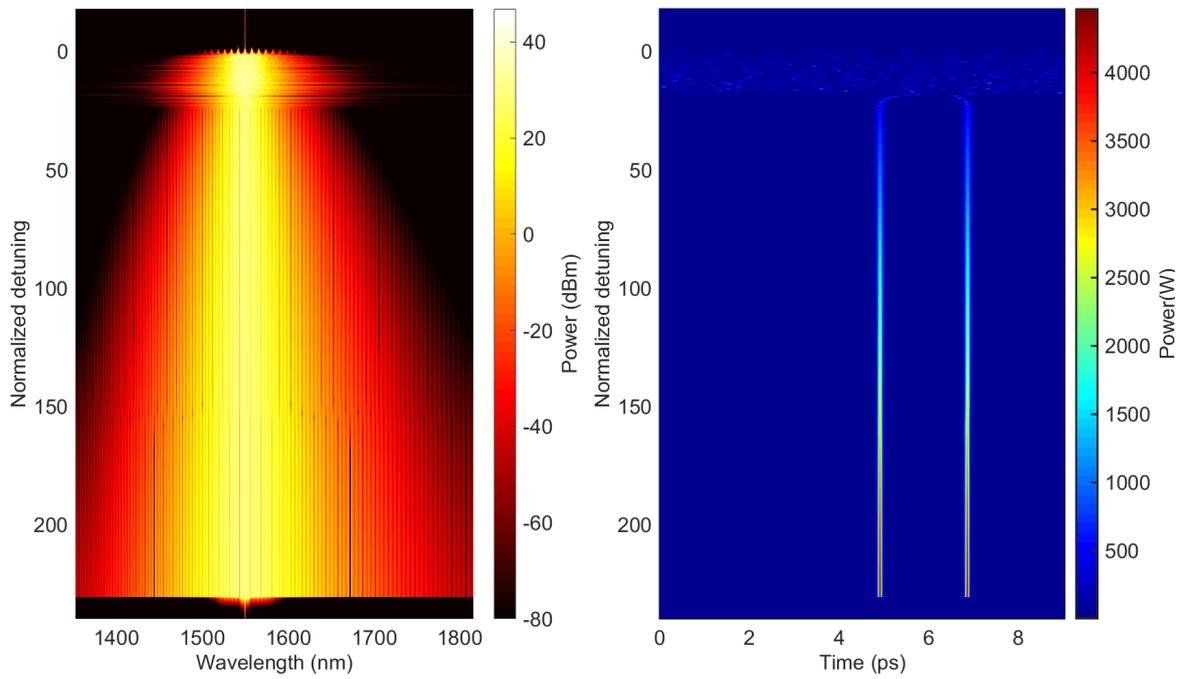


Fig. 3.5. Transition of spectrum (left) and waveform (right).

Fig. 3.4. および Fig. 3.5. で示すように、カオス領域を経てその後ソリトンが2つ形成された。チューリングパターンからカオス状領域に入りソリトンが生成する場合の具体的な時間波形および周波数スペクトルを Fig. 3.6. に示す。

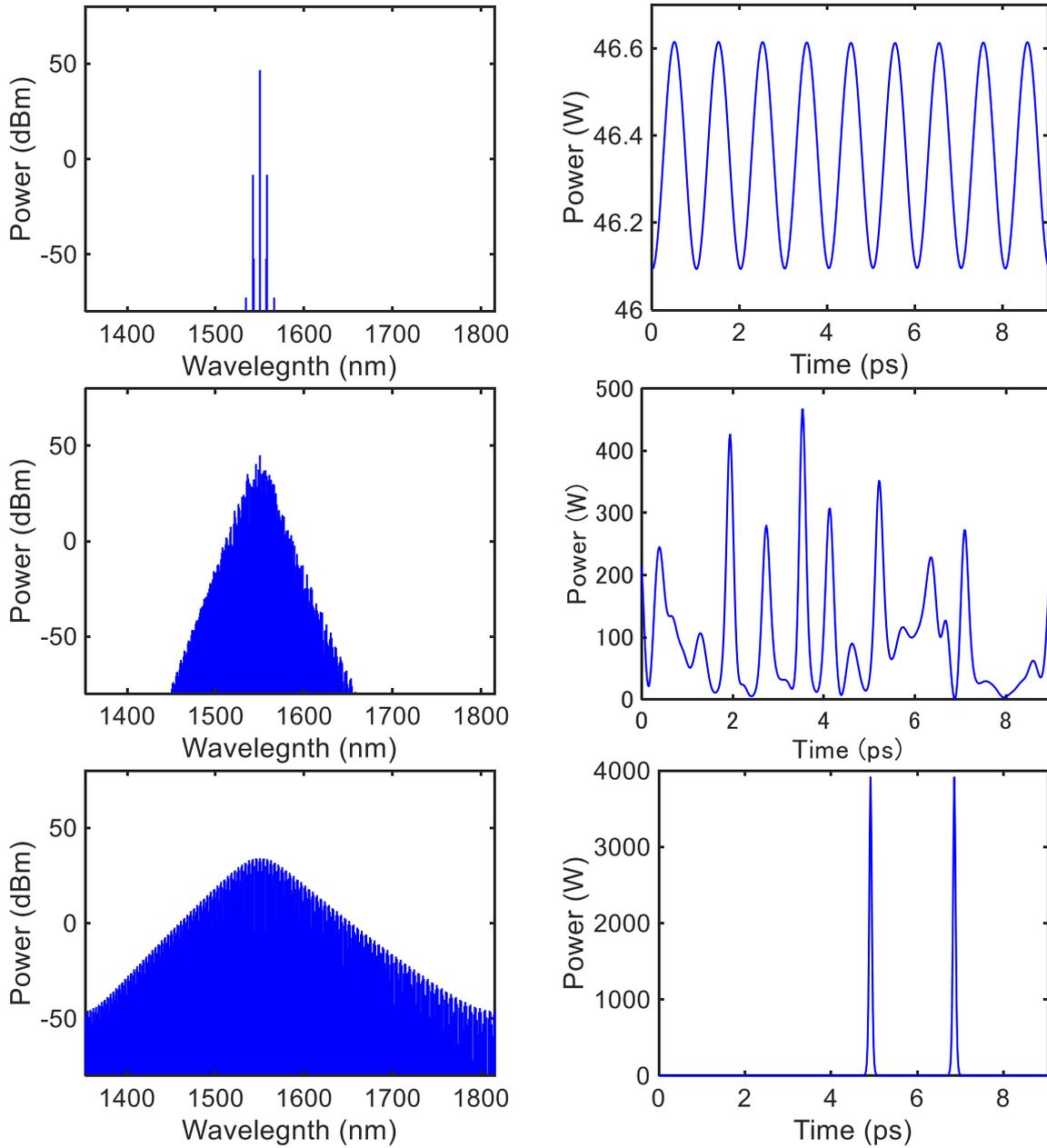


Fig. 3.6. Examples of spectrum (left) and waveform (right). These figures show Turing pattern (top), chaotic state (center), and soliton state (bottom).

3.2.2 可飽和吸収体を用いた場合

次に可飽和吸収体を用いた場合の結果を Fig. 3.7. から Fig. 3.9. にまとめる.

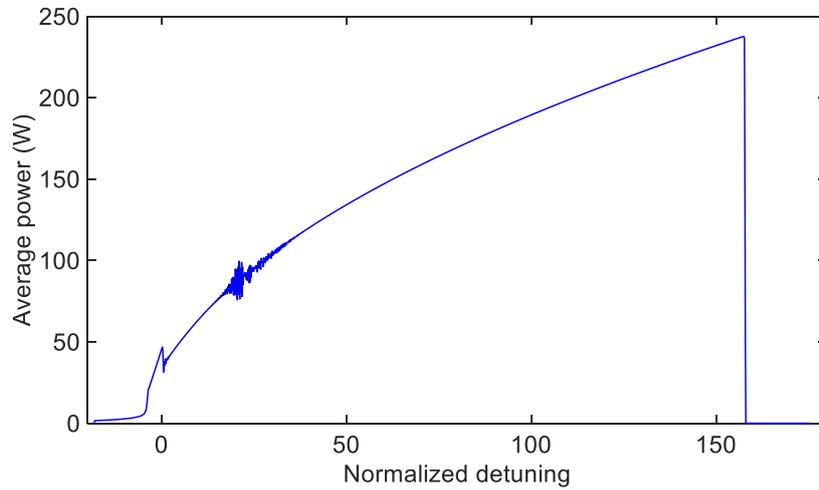


Fig. 3.7. Intracavity power as a function of normalized detuning when a saturable absorber was present.

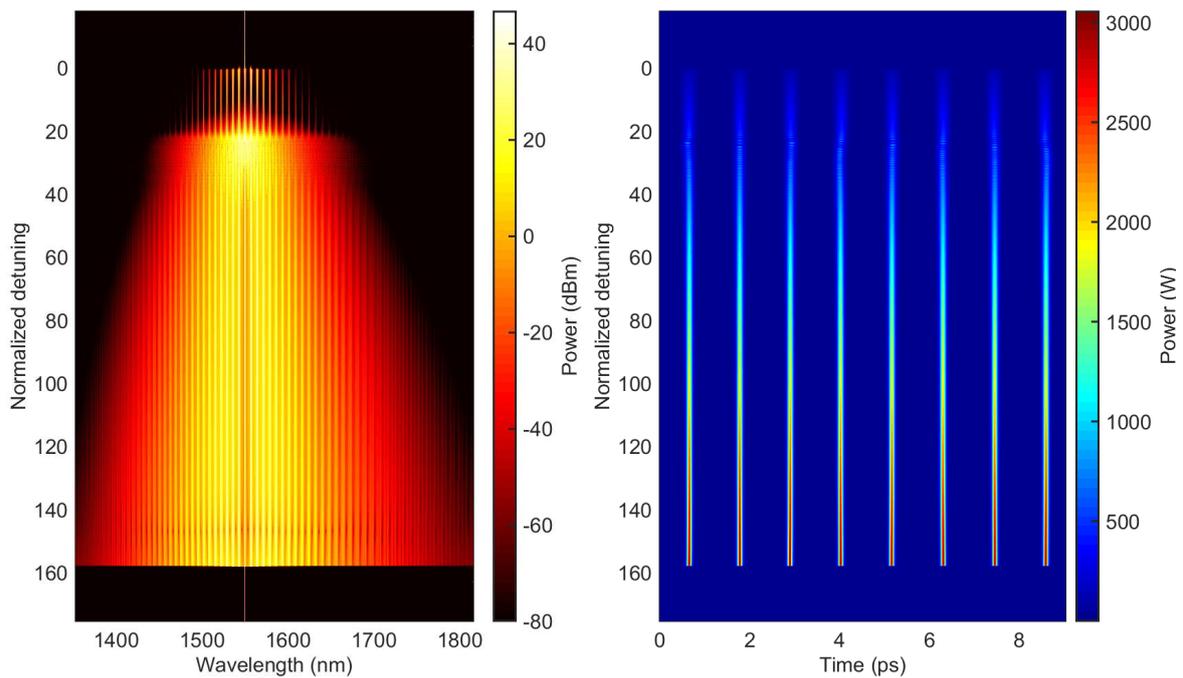


Fig. 3.8. Transition of spectrum (left) and waveform (right) when a saturable absorber was present.

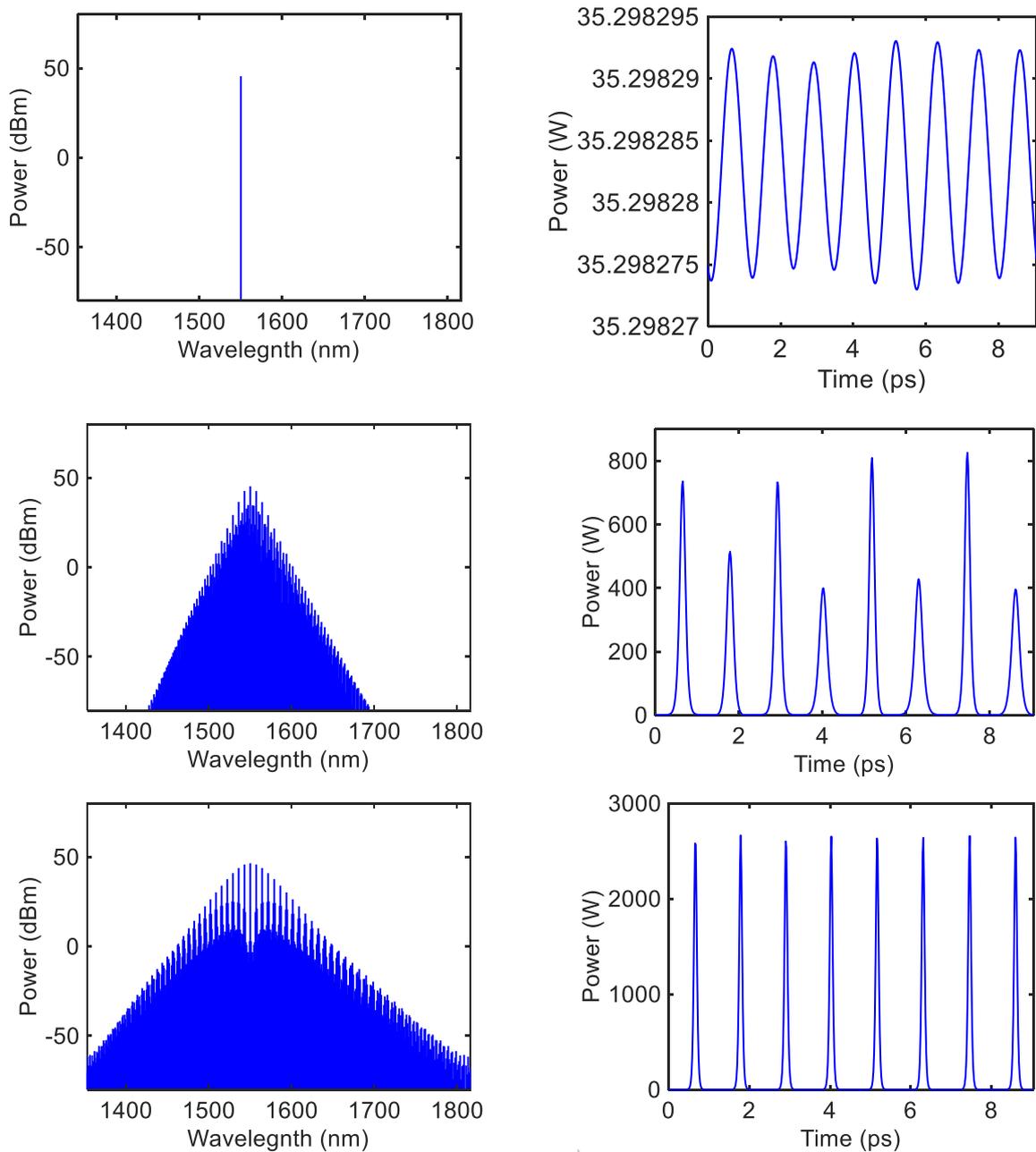


Fig. 3.9. Examples of spectrum (left) and waveform (right) when a saturable absorber was present.

可飽和吸収体がない場合には周波数が広がり共振器内部の平均パワーも大きくなるが、カオス状態が終わりソリトンが形成される際に、内部パワーは急激に落ちることが分かる。一方で可飽和吸収体を用いた場合には、四光波混合が開始され最初の周期的なパターンが形成される時点までは可飽和吸収体を用いない場合と同様な様子が見られた。しかし、デチューニングが進むにつれ、可飽和吸収体を用いた場合には内部パワーや波形が大

大きく揺れ動くカオス領域に入ることになったのに対し、可飽和吸収体を用いた場合には個々のパルスのピークパワーは変動したのだが、パルス数は維持されていた。そして安定なソリトン領域になると、ソリトン解から外れるまでパルスが存在することとなった。

可飽和吸収体を与えた場合ソリトン数はより多くなり、全体のパワーが大きくなったことは注目に値する。これは、高繰り返しで動作させる場合、また高い平均パワーを必要とする場合に応用できる可能性がある。よって、より詳細な条件について次章でまとめる。

3.3 変調深さとの関係

可飽和吸収体を用いることにより、生成されるパルス数が多い例を示してきたが、カオス領域を通ることにより最終的なソリトンの数は変化するため、全く同じパラメータを用いて計算をした場合であっても必ずしも同じ結果になるとは限らない。そこで同じシミュレーションを繰り返し行い、分布パターンを調べた。

可飽和吸収体の有無だけではなく、変調深さ α_0 の異なる可飽和吸収体を用いた場合の結果を Fig. 3.10. から Fig. 3.14. にまとめる。ソリトン形成を 100 回シミュレーションをし、内部パワー変化と最終的に得られたソリトンの数を調べた。変調深さは可飽和吸収体の性能を決める重要なパラメータであり、実験からは 3.2×10^{-3} という値が得られている^[30]。そのためその値付近の値を用いて計算を行った。

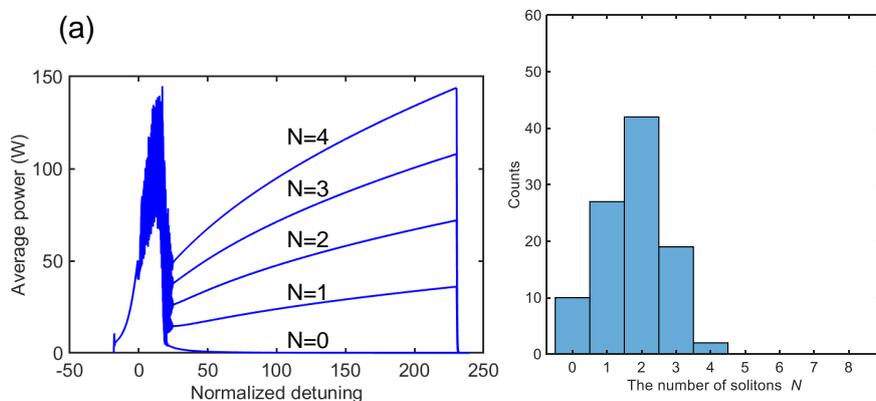


Fig. 3.10. Average power and histogram showing the number of solitons. Without saturable absorber.

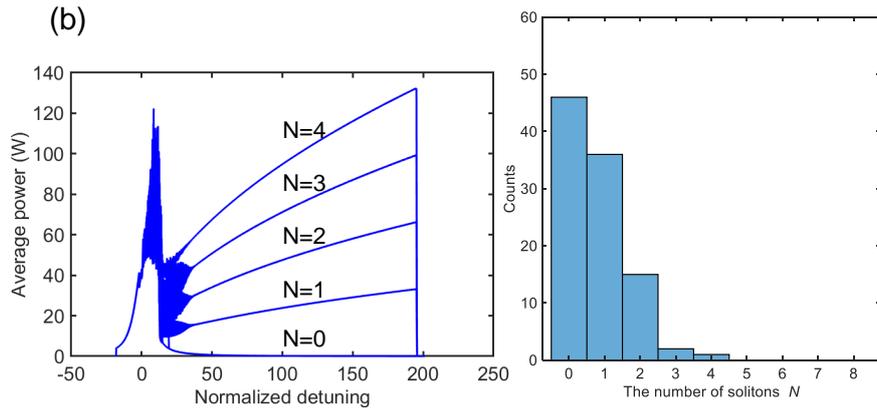


Fig. 3.11. Average power and histogram showing the number of solitons. $\alpha_0 = 2 \times 10^{-3}$.

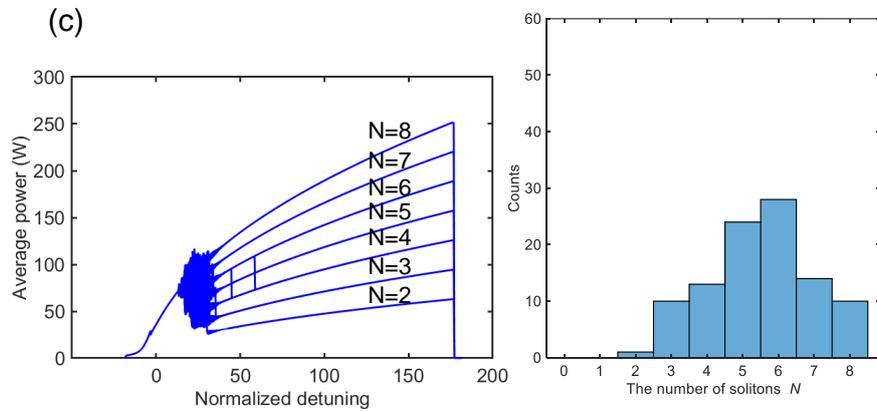


Fig. 3.12. Average power and histogram showing the number of solitons. $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$.

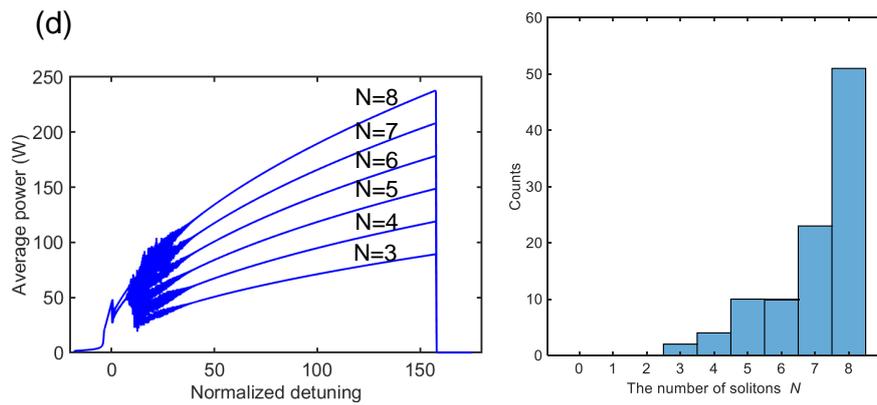


Fig. 3.13. Average power and histogram showing the number of solitons. $\alpha_0 = 4 \times 10^{-3}$

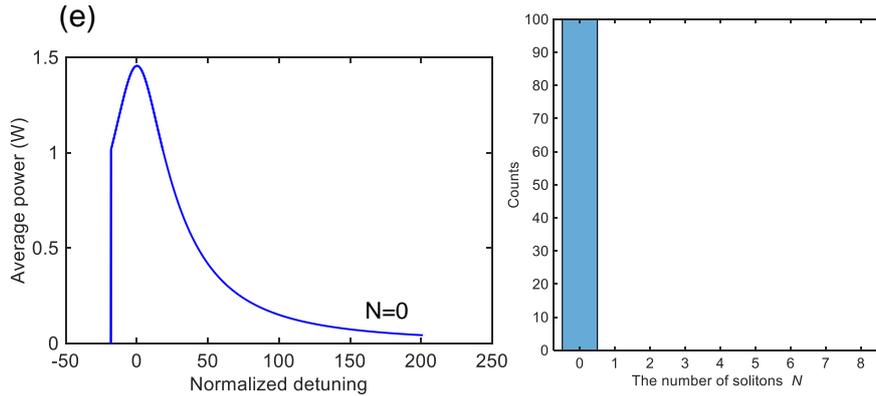


Fig. 3.14. Average power and histogram showing the number of solitons. $\alpha_0 = 5 \times 10^{-3}$.

(a) は可飽和吸収体を用いない場合の結果であり、つまり基本的な LLE を解いただけであるが、この結果より最終的なソリトン数は一定とならないことが分かる。可飽和吸収体を用いた場合の結果は (b)-(e) であるが、(d) が最終的に生成されるソリトンの数が最も多いため、これを基準に考察することとする。

まず、(d) より α_0 が大きい (e) ではソリトンが一つも形成されていない。 α_0 が大きいとはすなわち同じ強度の光に対しても損失が大きいことであり、四光波混合が連続的に起きコムが発生しなかったと考えられる。一方で (b), (c) では α_0 を小さくしたのだが、反対に可飽和吸収体としての効果を下げたことになる。可飽和吸収体がマルチソリトンの形成に役立つのならば、その効果が弱まることで (b),(c) では平均ソリトン数が減少している。(b) は (a) よりも少なくなっているが、これは可飽和吸収体は損失として働いたため、(a) よりも (b) の場合にはコムが生成されない確率が上がったと考えられる。

第 4 部

Er 添加微小光共振器の解析

4.1 モード同期パルス

光コムの生成において、四光波混合を用いない別の方法がモード同期レーザを使う方法であり、その代表例が利得媒質に Er を用いたファイバーレーザである。カーコムでは 1550 nm 付近の光を入射を想定したのに対し、Er を利得媒質として用いると 1480 nm の波長の光を入射することで、1550 nm の光を放出する。これはバックグラウンド光なしでの動作が可能ということであり、Er を用いた場合の利点となるが、1 周の距離が長くなってしまいうため繰り返し周波数が高くなってしまいう欠点がある。そこで考案されたのが、Fig. 4.1. のようなファイバーレーザの系を微小光共振器に当てはめた系である。

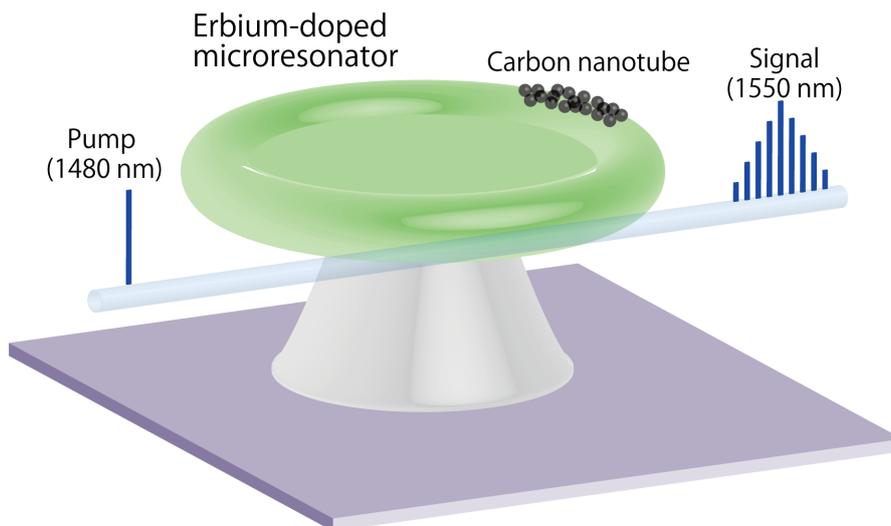


Fig. 4.1. Schematic illustration of Er-doped microtoroid with CNT.

ファイバーレーザを用いた系での繰り返し周波数は高繰り返しなもので数 100 MHz 程度である^[31]。しかし微小光共振器を用いることにより 1 周の距離が小さくなり 100 GHz を超える繰り返し周波数が可能となる。そのために必要なパラメータを探るべく、数値解析を行った。シミュレーションモデルは LLE におけるデチューニング項と外部入力光の項を外し、新たに可飽和吸収体と Er による利得を加えた (2.3.13) 式を使用した。

4.2 計算結果

4.2.1 低損失の場合

2章でまとめたように、Erの利得の算出方法にはレート方程式を解き毎周更新する方法と、レート方程式の定常解より求める小信号利得と飽和利得を用いて計算する方法が考えられる。そこでまず、上記2つの方法で結果が一致する例を示す。シミュレーションに用いた値はTable 4.1.に示す。確実にパルスとなるように Q 値は高く設定した。

Table 4.1. Parameters used in the simulation for this section.

| Parameter | Value |
|--|--|
| Cavity length L | $600\pi \mu\text{m}$ |
| Free spectral range | 110 GHz |
| Quality factor Q | 10^8 |
| Modulation depth α_0 | 10^{-5} |
| Nonlinear refractive index n_2 | $22 \times 10^{-21} \text{m}^2/\text{W}$ |
| Effective mode area A_{eff} | $29.74 \mu\text{m}^2$ |
| Dispersion β_2 | $-17.7 \text{ps}^2/\text{km}$ |
| Saturable intensity I_{sat} | $15 \text{MW}/\text{cm}^3$ |
| Gain bandwidth f_g | 2.5 THz |
| Er concentration N_{Er} | $1 \times 10^{25} \text{m}^{-3}$ |
| Signal absorption cross section σ_s^a | $2.8 \times 10^{-25} \text{m}^2$ |
| Signal emission cross section σ_s^e | $4.8 \times 10^{-25} \text{m}^2$ |
| Pump absorption cross section σ_p^a | $1.5 \times 10^{-25} \text{m}^2$ |
| Pump emission cross section σ_p^e | $0.8 \times 10^{-25} \text{m}^2$ |
| Upper-state life time τ | 10 ms |
| Pump power P_{pump} | 500 mW |

定常解析および過渡解析においてそれぞれ 800 万周した場合の結果を Fig. 4.2. に示す。ランダムなノイズを含んだ微弱な光が、利得により増幅され最終的にパルスが形成されている。

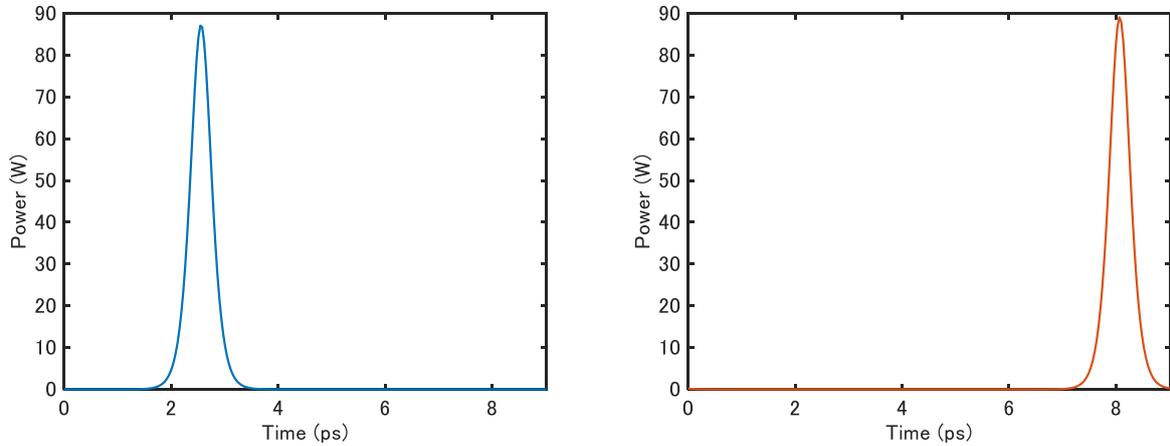


Fig. 4.2. Result of steady-state analysis (left) and transient analysis (right).

波形としてはほぼ同じ形となった。若干ピークパワーが異なるが、これはシード光がランダムであるために同じ値を用いていないこと、また計算過程における打ち切り誤差等から生じると考えられる。より詳しい遷移の様子を知るため、ゲインの変化およびピークパワーと平均パワーの比について Fig. 4.3. にまとめる。

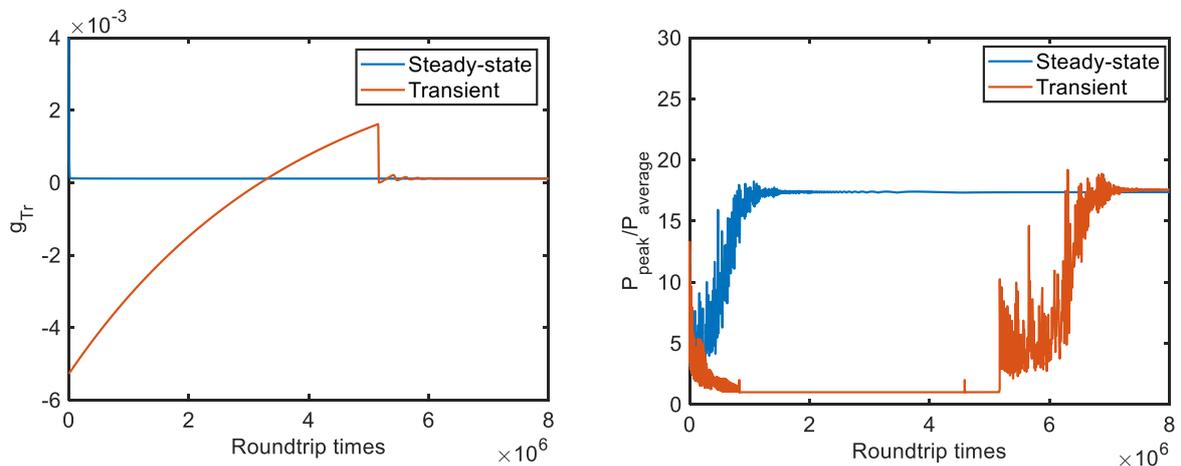


Fig. 4.3. Gain (left) and ratio of peak power and average power (right) and transient.

レート方程式の定常状態を仮定する方法では、利得は次第に飽和するという特性上、微弱なシード光の際に最大利得を示すが、共振器パワーが高まると飽和してほぼ一定値とな

る．実際に1万周付近でゲインが安定し，それに伴い平均パワーも一定の値となった．しかしこの段階ではまだパルスとなっておらず，ピークパワーと平均パワーの比も大きく上下する．この比はより鋭いパルスになるほど大きな値を示し，連続波に対しては小さな値となるため，パルス化が生じているかの指標となる．150万周付近では一定の値を取っており，安定したモード同期されたパルスとなっていることが分かる．過渡解析に比べ短い時間で定常状態に落ち着く．その初期のパルスの変化の例を Fig. 4.4. にまとめる．

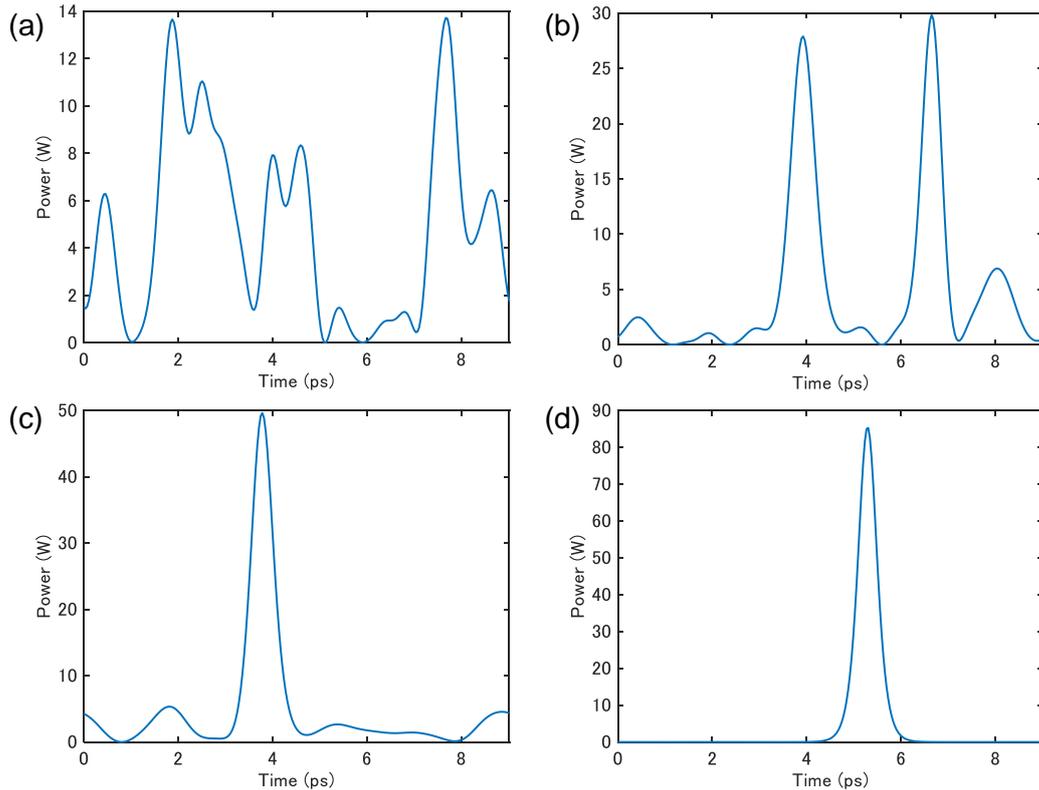


Fig. 4.4. Time waveform when roundtrip times are (a) 25000 (b) 50000 (c) 1000000 (d) 2000000.

過渡解析においては，定常状態に至るまで時間がかかっている．これは上準位に原子が溜まるのに時間がかかるためであり，利得が上昇しづらいためである．しかし，利得がある程度大きくなると，共振器内部のパワーが急激に上がり，反対に上準位から下準位に遷移するため，利得は小さくなる．すると共振器内部のパワーは小さくなるため利得はまた増加し，このように増減を繰り返した結果，安定した値へと収束する．また，レート方程式の定常解を用いる計算方法を使用した場合とは異なり，利得はマイナスから始まっており，これは損失を表す．そのため発振するまでに大きな損失を受けることとなり，平均パ

ワーがかなり小さくなってしまふ．この計算は MATLAB を用いて計算したのだが，平均パワーが小さくなりすぎた結果 $P_{\text{peak}}/P_{\text{average}}$ の値が精密に算出されない部分が出たため，その部分を 1 で補完したため不自然な直線となってしまった．レート方程式を用いて求めた上準位と下準位の原子数を Fig. 4.5. にまとめる．

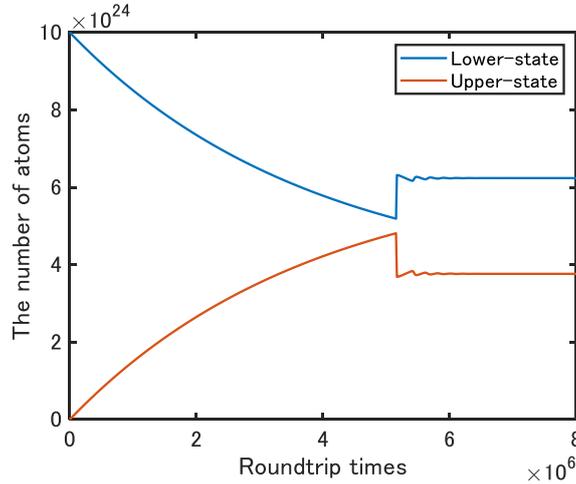


Fig. 4.5. Transition of the number of atoms.

単位当たりのエルビウムイオンの数は 10^{25} であり，それらはすべて下準位にあると仮定した．時間が経過するにつれ，下準位から上準位への遷移が生じこれに伴い利得も増加している．ここで吸収断面積と放出断面積の差から下準位の方が上準位よりも多い状態であっても，利得が正になり得ることに注意が必要である．このようにして利得が十分大きくなった後，上準位から下準位への遷移が急激に生じるが，上準位から下準位あるいは下準位から上準位への遷移を繰り返しやがて一定の値へと収束する．

4.2.2 カラーマップ

前章では 1 つのパラメータに絞って計算を行ったが，パラメータを変化させながらモード同期に必要な条件を探す．今回は共振器の Q 値と可飽和吸収体の変調深さ α_0 の大きさを変化させ，それぞれの値を用いた場合に最終的に共振器内で形成された光が示す $P_{\text{peak}}/P_{\text{average}}$ の値をレート方程式で定常状態と，常に仮定する方法としない方法で算出した． Q 値を 10^6 から 10^8 までスイープさせ， α_0 を 10^{-5} から 10^{-3} までスイープさせた時の $P_{\text{peak}}/P_{\text{average}}$ の値をカラーマップで Fig. 4.6. と Fig. 4.7. に示す．

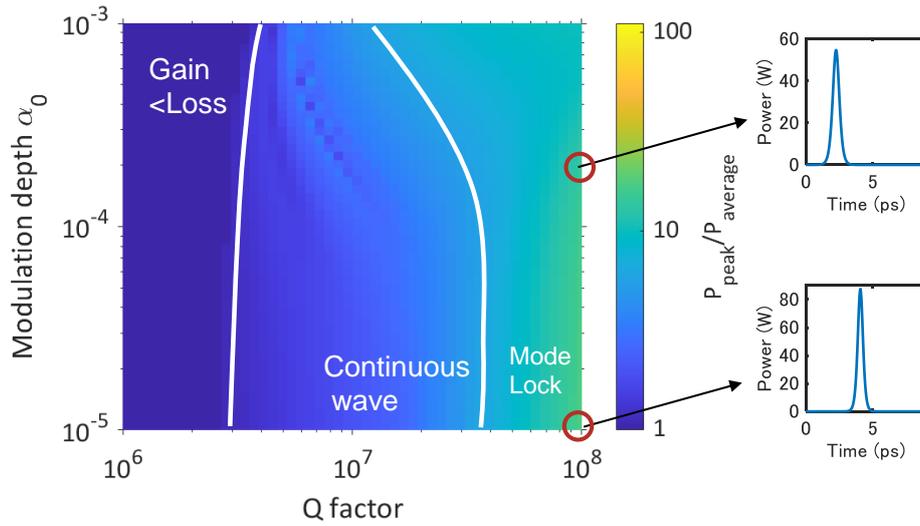


Fig. 4.6. Colormap showing the ratio of the peak power to the average power. The gain was calculated by the small signal gain.

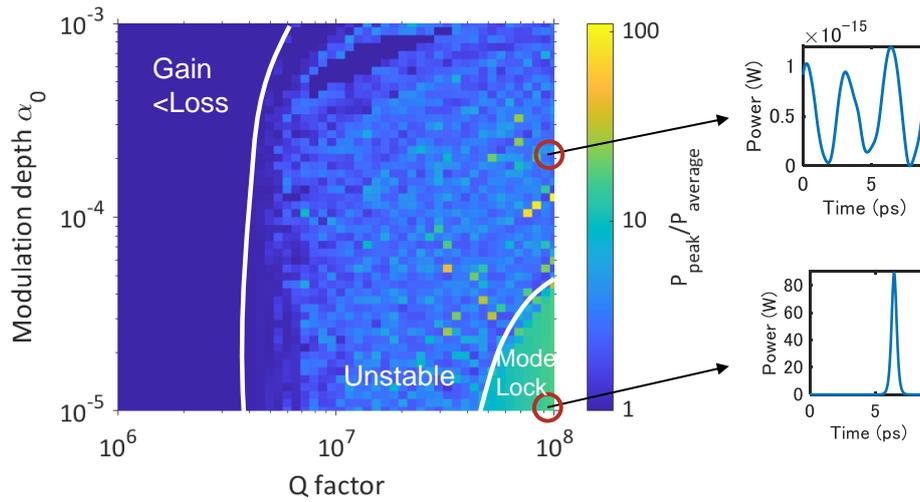


Fig. 4.7. Colormap showing the ratio of the peak power to the average power. The gain was calculated by the rate equation.

Fig. 4.6. と Fig. 4.7. のカラーマップでは、両者を比較しやすいよう Fig. 4.7. の最大値で規格化した色を使用している。ピークパワーと平均パワーの比が十分大きい箇所は緑色で示されモード同期がなされてパルス化しているのに対し、青色はピークパワーと平均パワーがほぼ同じ色になっており、連続波となっていることが分かる。また、Fig. 4.6. の計算において利得の最大値は共振器内のパワーが 0 の場合であり、利得と損失のバランス

を考えた際に常に利得が損失を下回る時は利得<損失として計算を行わなかった．一方で Fig. 4.7. では，利得の最大値は計算上，上準位に全ての原子が励起された場合であるが，実際にそのような状態になる前に下準位の遷移がおこるため，損失が利得を上回る境界を計算で求めることはできず，また過渡解析では上準位の原子が増え利得が増えるのにかかる時間が長く，特に損失と利得がほぼ同等の領域では，レーザ発振が生じるまでに計算が打ち切られてしまうことがあるため，Fig. 4.6. と Fig. 4.7. では損失と利得の境目がずれてしまっていると考えられる．また，Fig. 4.6. と Fig. 4.7. の右下のモード同期がかかる領域では計算結果が一致しているのだが，計算が明らかに一致していない箇所は，過渡解析では不安定な領域が生じている．この場合の具体例を Fig. 4.8. に示す．

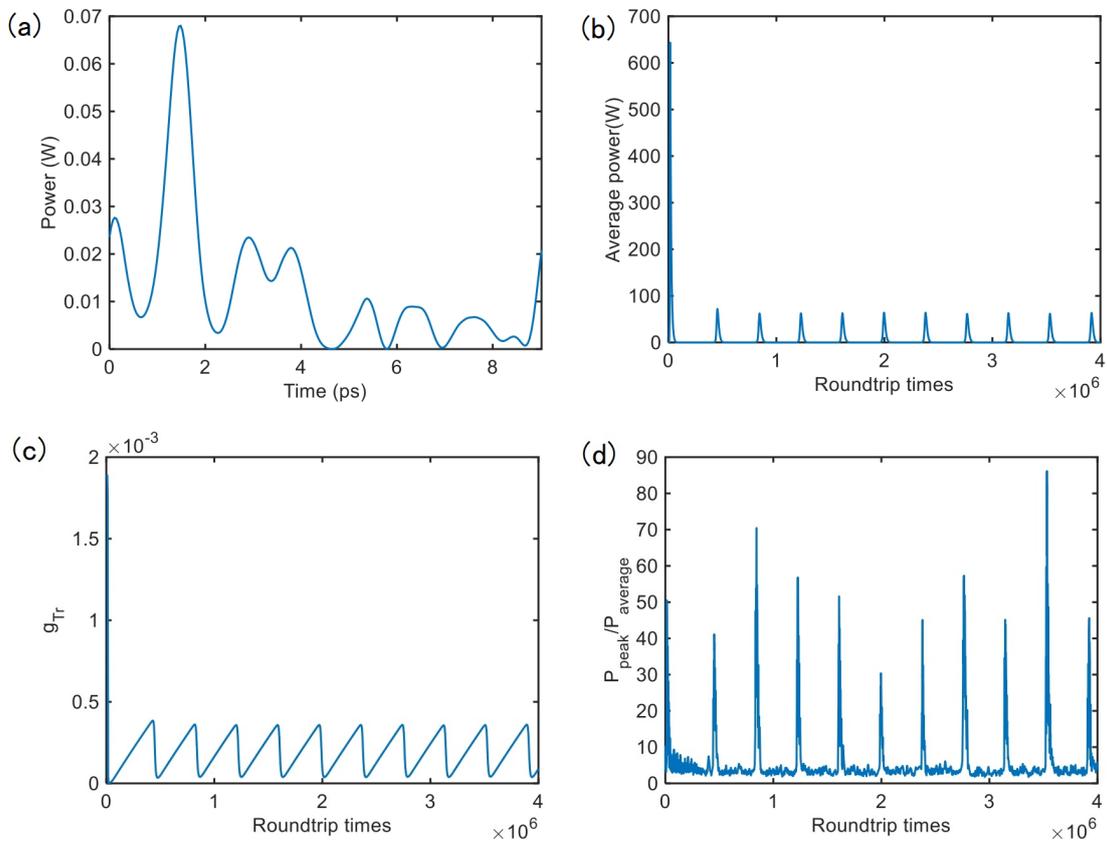


Fig. 4.8. Result when $Q = 10^8$, and $\alpha_0 = 10^{-4}$. (a) Time waveform. (b) Average power. (c) Gain. (d) Ratio of the peak power to the average power.

最終的な波形は Fig. 4.8.(a) のようにモード同期とはなっておらず，Fig. 4.8.(b) から共振器内の平均パワーが一定間隔で大きくなっており， Q スイッチレーザのような動作をしていることが分かる．また Fig. 4.8.(c) からは利得が上下しており，その変化は収束する

様子も見られず、同じ形を繰り返している。特にその周期的な形は増加時はゆるやかな傾きであるが、減少時は急な傾きとなっており、これはレート方程式で算出した上準位と下準位間における変化を反映していると考えられる。Fig. 4.8.(d) では、平均パワーが不安定となっていることから、これも一定の値とはならない。このような現象が過渡解析において生じる原因についての考察を次章にまとめる。

4.3 考察

4.3.1 利得の計算手法による違い

Fig. 4.6. と Fig. 4.7. において、 Q 値が大きく α_0 が小さい領域ではカラーマップの結果が一致したが、他の領域では異なる結果となった。結果が一致しない領域に共通するのはより損失が多いことである。損失がある程度大きい場合には、それに打ち勝つように利得も大きくなる必要があるが、損失が大きいため上準位に遷移するのに時間がかかる。時間をかけて上準位原子数を溜め、大きなゲインによる急激な内部パワーの上昇を引き起こし、それにより今度は急激に利得が下がり、下準位から上準位に遷移する過程を繰り返しているのだと考えられる。このように上準位と下準位の原子数が周期的に増減するため、レート方程式において定常状態と仮定して $dN/dt = 0$ と考えた方法とは異なる結果となる。

このことを裏付けるために、モード同期が実現されているファイバーレーザの場合はシミュレーションをする際に過渡解析の必要性を考える。実際、ファイバーレーザの解析において、レート方程式を解かず利得を算出することは珍しくない。そこでそのような場合において損失がどのような値となっているかを調べた。

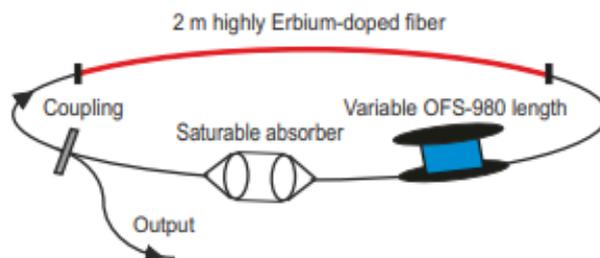


Fig. 4.9. The setup of fiber laser. [I. Yarutkina, O. Shtyrina, M. Fedoruk, and S. Turitsyn, “Numerical modeling of fiber lasers with long and ultra-long ring cavity,” *Opt. Express* **21**, 12942-12950 (2013)]

Fig. 4.9. に表されるファイバーレーザで、トータルの長さ L を 32 m、可飽和吸収体の変

調深さ α_0 を 0.1, ファイバーでの損失 α を 0.2 dB/km, 出力とのカップリング係数 R_{out} を 0.9 とする^[32].

まずファイバーレーザの線形的な損失は, ファイバーそのものによる損失に加え出力のため 2 手に分かれる箇所でも損失となるが, 後者の要因の方が大きく支配的となるため, これを計算する. 今回毎周 1 割の光が取り出されているため, まず光が 1 周するのにかかる時間 T は

$$T = nL/c \quad (4.3.1)$$

であるため, 1 秒あたりの損失 l は元のエネルギーを U_0 として

$$l = \frac{0.1U_0}{T} \quad (4.3.2)$$

で表わすことができる. Q 値は角周波数 ω_0 を用いて

$$Q = \omega_0 \frac{U_0}{-\frac{dU_0}{dt}} \quad (4.3.3)$$

であるので, これらに値を代入することで

$$Q = 1.87 \times 10^9 \quad (4.3.4)$$

を得る.

一方可飽和吸収体の変調深さについて考えると 0.1 であったが, これはファイバーレーザの 1 周 32 m という長さに対してである. 今回検討した微小光共振器の直径は 600 μm であり 1 周が短い分可飽和吸収体の影響を受ける回数が増えることとなるため, これを考慮する必要がある, ファイバーレーザの値を微小光共振器 1 周あたりで受ける可飽和吸収体の効果に換算すると,

$$\alpha_0 = 5.8 \times 10^{-6} \quad (4.3.5)$$

となる.

微小光共振器で考えていたパラメータと比較すると, Q 値は大きく, α_0 は小さい値となっている. カラーマップにおいて Q 値の最小値が 10^6 で 最大値を 10^8 , α_0 の最小値を 10^{-5} , 最大値を 10^{-3} としたことを考慮すると, このファイバーレーザのパラメータはカラーマップにおける右下の領域, すなわちモード同期パルスが生成され 2 つの計算手法での結果が一致する領域に対応する. もちろん分散や利得が異なるためより正確にはそれらの値も考慮して計算する必要があるが, 損失という観点から予想すると, このファイバーレーザでは定常状態を仮定した利得の計算で十分であったと考える.

4.3.2 モード同期に必要な条件

ここまで手法による違いに着目してきたが、最後に本来の目的であるモード同期を達成するために必要なパラメータをまとめる。より厳密に計算することで得たグラフからは安定したモード同期パルスを得るためには α_0 は 5×10^{-5} 以下で Q 値が 5×10^7 以上であることが望ましいと言える。そこでこれらの値を実際に達成した値と比較する。まず、可飽和吸収体の変調深さの測定結果としては $\alpha_0 = 3.2 \times 10^{-3}$ という結果が得られている^[30]。変調の深さは大きい程可飽和吸収体としての性能が高いと評価されるが、あまりに大きいと単に損失が増えてしまい発振できなくなる。そのためカーボンナノチューブの濃度を下げる等により変調深さを下げればよい。一方で Q 値は 5×10^7 以上が必要であるが、当研究室で達成できたのはまだ $Q = 10^7$ 程度であるため、作製プロセスの改善などを行いもう少し Q 値を向上させる必要がある。

第5部

結論

本研究は可飽和吸収体を用いた場合におけるソリトン発生についての研究であり、大きく分けて2つのことが分かった。

1つ目は可飽和吸収体を用いることにより散逸性カーソリトンの発生する数を増やすことが可能だという点である。散逸性カーソリトンはカオス領域を経てから形成されるため、その発生する数はランダムとなり、場合によってはソリトンが形成されないことさえある。しかし、本研究は可飽和吸収体を加えることにより、ソリトンができないという状態が回避され安定した多数のソリトン形成に繋がることを明らかにした。このマルチソリトン状態は、共振器内パワーの上昇やさらなる高繰り返しへの応用に期待できる。

2つ目は、Er 添加微小光共振器に可飽和吸収体を用いたレーザにおけるモード同期に必要な条件である。希土類の利得媒質で発振させ可飽和吸収体によりモード同期をかける方法はファイバーレーザにおいて広く使われているが、1周が長いと繰り返し周波数が低いという問題点があったのに対し、今回の研究対象のような微小光共振器を用いることにより 100 GHz を超えるような高繰り返し周波数での動作が期待される。そこで必要な条件を探るために、非線形シュレディンガー方程式とレート方程式を組み合わせた式を解くことでシミュレーションを行った。その結果、モード同期のためには低損失が必要であり、具体的には Q 値が 5×10^7 以上で変調深さ α_0 は 5×10^{-5} 以下が望ましいことが分かった。またレート方程式を解いた場合と解かずに定常状態と仮定して計算した場合において、損失が大きい場合には同じ値に収束しない結果となることから、厳密な計算のためには過渡解析が必要であることを明らかにした。

参考文献

- [1] A. De Riva, G. Zavattini, S. Marigo, C. Rizzo, G. Ruoso, G. Carugno, R. Onofrio, S. Carusotto, M. Papa, F. Perrone, *et al.*, “Very high Q frequency-locked Fabry–Perot cavity,” *Review of scientific instruments* **67**(8), 2680–2684 (1996).
- [2] I. S. Grudin, A. B. Matsko, A. A. Savchenkov, D. Strekalov, V. S. Ilchenko, and L. Maleki, “Ultra high Q crystalline microcavities,” *Optics Communications* **265**(1), 33–38 (2006).
- [3] D. Armani, T. Kippenberg, S. Spillane, and K. Vahala, “Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip,” *Nature* **421**(6926), 925–928 (2003).
- [4] S. Ogawa, M. Imada, S. Yoshimoto, M. Okano, and S. Noda, “Control of light emission by 3D photonic crystals,” *Science* **305**(5681), 227–229 (2004).
- [5] T. H. Maiman, “Stimulated optical radiation in ruby,” *nature* **187**(4736), 493–494 (1960).
- [6] J. Geusic, H. Marcos, and L. Van Uitert, “Laser oscillations in Nd-doped yttrium aluminum, yttrium gallium and gadolinium garnets,” *Applied Physics Letters* **4**(10), 182–184 (1964).
- [7] C. J. Koester and E. Snitzer, “Amplification in a fiber laser,” *Applied optics* **3**(10), 1182–1186 (1964).
- [8] J. Hecht, “High-Power Fiber Lasers,” *Optics and Photonics News* **29**(10), 30–37 (2018).
- [9] P. P. Sorokin and J. Lankard, “Stimulated emission observed from an organic dye, chloro-aluminum phthalocyanine,” *IBM Journal of Research and Development* **10**(2), 162–163 (1966).
- [10] D. Stefanska, M. Suski, and B. Furmann, “Tunable continuous wave single-mode dye laser directly pumped by a diode laser,” *Laser Physics Letters* **14**(4), 045,701 (2017).
- [11] R. Delmdahl, “Precision engineering,” *Nature Photonics* **4**(5), 286–286 (2010).
- [12] A. Martinez and Z. Sun, “Nanotube and graphene saturable absorbers for fibre lasers,” *Nature Photonics* **7**(11), 842–845 (2013).
- [13] S. Iijima, “Helical microtubules of graphitic carbon,” *nature* **354**(6348), 56–58 (1991).
- [14] S. Y. Set, H. Yaguchi, Y. Tanaka, and M. Jablonski, “Laser mode locking using a saturable absorber incorporating carbon nanotubes,” *Journal of lightwave Technology* **22**(1), 51 (2004).

- [15] D. J. Jones, S. A. Diddams, J. K. Ranka, A. Stentz, R. S. Windeler, J. L. Hall, and S. T. Cundiff, “Carrier-envelope phase control of femtosecond mode-locked lasers and direct optical frequency synthesis,” *Science* **288**(5466), 635–639 (2000).
- [16] T. Herr, V. Brasch, J. D. Jost, C. Y. Wang, N. M. Kondratiev, M. L. Gorodetsky, and T. J. Kippenberg, “Temporal solitons in optical microresonators,” *Nature Photonics* **8**(2), 145–152 (2014).
- [17] L. A. Lugiato and R. Lefever, “Spatial Dissipative Structures in Passive Optical Systems,” *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2209–2211 (1987).
- [18] T. J. Kippenberg, A. L. Gaeta, M. Lipson, and M. L. Gorodetsky, “Dissipative Kerr solitons in optical microresonators,” *Science* **361**(6402) (2018).
- [19] J. A. Jaramillo-Villegas, X. Xue, P.-H. Wang, D. E. Leaird, and A. M. Weiner, “Deterministic single soliton generation and compression in microring resonators avoiding the chaotic region,” *Optics express* **23**(8), 9618–9626 (2015).
- [20] D. C. Cole, E. S. Lamb, P. Del’ Haye, S. A. Diddams, and S. B. Papp, “Soliton crystals in Kerr resonators,” *Nature Photonics* **11**(10), 671–676 (2017).
- [21] M. Karpov, M. H. Pfeiffer, H. Guo, W. Weng, J. Liu, and T. J. Kippenberg, “Dynamics of soliton crystals in optical microresonators,” *Nature Physics* **15**(10), 1071–1077 (2019).
- [22] B. Yao, S.-W. Huang, Y. Liu, A. K. Vinod, C. Choi, M. Hoff, Y. Li, M. Yu, Z. Feng, D.-L. Kwong, *et al.*, “Gate-tunable frequency combs in graphene–nitride microresonators,” *Nature* **558**(7710), 410–414 (2018).
- [23] Z. Xiao, K. Wu, T. Li, and J. Chen, “Deterministic single-soliton generation in a graphene-FP microresonator,” *Optics Express* **28**(10), 14,933–14,947 (2020).
- [24] G. P. Agrawal, “Nonlinear fiber optics”, 5th ed. (Academic Press, Amsterdam, 2013).
- [25] H. A. Haus, “Theory of mode locking with a fast saturable absorber,” *Journal of Applied Physics* **46**(7), 3049–3058 (1975).
- [26] I. H. Malitson, “Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica,” *Josa* **55**(10), 1205–1209 (1965).
- [27] S. Fujii and T. Tanabe, “Dispersion engineering and measurement of whispering gallery mode microresonator for Kerr frequency comb generation,” *Nanophotonics* **1**(ahead-of-print) (2020).
- [28] Q. Li, T. C. Briles, D. A. Westly, T. E. Drake, J. R. Stone, B. R. Ilic, S. A. Diddams, S. B. Papp, and K. Srinivasan, “Stably accessing octave-spanning microresonator frequency combs in the soliton regime,” *Optica* **4**(2), 193–203 (2017).

- [29] T. Carmon, L. Yang, and K. J. Vahala, “Dynamical thermal behavior and thermal self-stability of microcavities,” *Optics express* **12**(20), 4742–4750 (2004).
- [30] 石田蘭丸, “超高繰り返しパルス光源開発に向けた微小光共振器と CNT の結合と評価,” Master’s thesis, 慶應義塾大学 (2020).
- [31] Z. Zhang, Z. Yan, K. Zhou, and L. Zhang, “All-fiber 250 MHz fundamental repetition rate pulsed laser with tilted fiber grating polarizer,” *Laser Physics Letters* **12**(4), 045,102 (2015).
- [32] I. Yarutkina, O. Shtyrina, M. Fedoruk, and S. Turitsyn, “Numerical modeling of fiber lasers with long and ultra-long ring cavity,” *Optics Express* **21**(10), 12,942–12,950 (2013).